Géométrie de la règle et perspective chez Lambert.

Christophe Eckes

Paris VII

4 avril 2011

Introduction

0.1. Définition et approche historique simplistes de la géométrie de la règle.

Au sens strict, la GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE désigne les constructions dans le plan à la RÈGLE SEULE, à l'exclusion d'autres instruments (COMPAS, BISSECTEUR, TRANSPORTEUR DE DISTANCES ou EMPAN, etc.).

Introduction

0.1. Définition et approche historique simplistes de la géométrie de la règle.

Au sens strict, la GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE désigne les constructions dans le plan à la RÈGLE SEULE, à l'exclusion d'autres instruments (COMPAS, BISSECTEUR, TRANSPORTEUR DE DISTANCES ou EMPAN, etc.).

Une construction à la règle fait intervenir exclusivement

- des intersections de droites
- des alignements de points

Introduction

0.1. Définition et approche historique simplistes de la géométrie de la règle.

Au sens strict, la GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE désigne les constructions dans le plan à la RÈGLE SEULE, à l'exclusion d'autres instruments (COMPAS, BISSECTEUR, TRANSPORTEUR DE DISTANCES ou EMPAN, etc.).

Une construction à la règle fait intervenir exclusivement

- des intersections de droites
- des alignements de points

Elle met de côté

1. le report du segment unité (possible avec un EMPAN)
2. les intersections de deux arcs de cercle ou d'une droite avec un arc de cercle (possibles avec un COMPAS).

D'après cette définition, la géométrie de la règle semblerait résulter de problèmes purement théoriques :

D'après cette définition, la géométrie de la règle semblerait résulter de problèmes purement théoriques :

- quelles sont les propriétés géométriques attachées à l'usage de la règle seule ? [il s'agirait essentiellement des propriétés projectives]
- quelles sont les figures qu'il serait POSSIBLE de construire à la règle seule ?

D'après cette définition, la géométrie de la règle semblerait résulter de problèmes purement théoriques :

- quelles sont les propriétés géométriques attachées à l'usage de la règle seule ? [il s'agirait essentiellement des propriétés projectives]
- quelles sont les figures qu'il serait POSSIBLE de construire à la règle seule ?

Ces problèmes orientent la lecture historique des *problèmes* de géométrie à la règle proposée par LAMBERT en 1774 : elle constituerait une étape décisive dans le développement de la géométrie projective au XIX$^{\text{e}}$ siècle, incarné par les travaux de BRIANCHON, PONCELET, CHASLES, STEINER ou encore VON STAUDT.

Nous souhaiterions corriger cette conception linéaire de l'histoire qui verrait dans les problèmes de LAMBERT un « chaînon manquant » avant l'avènement des nombreux travaux en géométrie projective au cours du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

Nous souhaiterions corriger cette conception linéaire de l'histoire qui verrait dans les problèmes de LAMBERT un « chaînon manquant » avant l'avènement des nombreux travaux en géométrie projective au cours du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

0.2. géométrie de la règle / géométrie à la règle et au compas.

Nous devons également éviter de *projeter* sur la géométrie de la règle de LAMBERT des questionnements spécifiques aux constructions à la règle et au compas.

Nous souhaiterions corriger cette conception linéaire de l'histoire qui verrait dans les problèmes de Lambert un « chaînon manquant » avant l'avènement des nombreux travaux en géométrie projective au cours du XIX^{e} siècle.

0.2. géométrie de la règle / géométrie à la règle et au compas.

Nous devons également éviter de *projeter* sur la géométrie de la règle de Lambert des questionnements spécifiques aux constructions à la règle et au compas.

- le problème THÉORIQUE visant à établir les conditions pour que des figures PUISSENT être construites à la règle et au compas oriente les travaux de Gauss (1799) et de Wantzel (1837)
- leurs solutions sont fondées sur des procédés d'ordre arithmético-algébrique.

Dans *Philosophie de l'algèbre*, VUILLEMIN montre que GAUSS et WANTZEL résolvent des problèmes algébriques lorsqu'ils se confrontent à la constructibilité de certaines figures à la règle et au compas.

Dans *Philosophie de l'algèbre*, VUILLEMIN montre que GAUSS et WANTZEL résolvent des problèmes algébriques lorsqu'ils se confrontent à la constructibilité de certaines figures à la règle et au compas.

VUILLEMIN s'appuie sur le modèle de leurs travaux pour regarder la « constructibilité » sous le jour d'une CLASSIFICATION LOGIQUE, quels que soient les instruments en jeu.

Dans *Philosophie de l'algèbre*, Vuillemin montre que Gauss et Wantzel résolvent des problèmes algébriques lorsqu'ils se confrontent à la constructibilité de certaines figures à la règle et au compas.

Vuillemin s'appuie sur le modèle de leurs travaux pour regarder la « constructibilité » sous le jour d'une classification logique, quels que soient les instruments en jeu.

« Les géomètres ont ainsi examiné quelles constructions demeuraient possibles, lorsqu'on utilisait la règle ou le compas à l'exclusion l'un de l'autre. Mohr, puis Mascheroni démontrèrent que toutes les constructions qu'assurait l'usage combiné des deux instruments pouvaient s'effectuer à l'aide du seul compas. De même, les peintres et les fondateurs de la Géométrie projective délimitèrent le domaine propre à « la Géométrie de la règle » et aux problèmes purement projectifs ». [p. 160]

0.3. Géométrie du compas / géométrie de la règle.

0.3. Géométrie du compas / géométrie de la règle.

Contrairement à VUILLEMIN nous ne saurions considérer comme équivalentes les démarches respectives de LAMBERT (1774) et de MASCHERONI (1797). Certes, ils développent respectivement

0.3. Géométrie du compas / géométrie de la règle.

Contrairement à VUILLEMIN nous ne saurions considérer comme équivalentes les démarches respectives de LAMBERT (1774) et de MASCHERONI (1797). Certes, ils développent respectivement

- une géométrie à la règle seule (LAMBERT)
- une géométrie au compas seul (MASCHERONI).

0.3. Géométrie du compas / géométrie de la règle.

Contrairement à VUILLEMIN nous ne saurions considérer comme équivalentes les démarches respectives de LAMBERT (1774) et de MASCHERONI (1797). Certes, ils développent respectivement

- une géométrie à la règle seule (LAMBERT)
- une géométrie au compas seul (MASCHERONI).

Cette symétrie ne doit pas nous tromper.

- Pour LAMBERT, les problèmes de construction à la règle seule doivent être résolus pour des motifs de SIMPLICITÉ PRATIQUE.
- Pour MASCHERONI, la géométrie du compas doit constituer une nouvelle branche des mathématiques, susceptible d'approfondir nos connaissances en GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Motivations de Mascheroni :

Motivations de MASCHERONI : « Est-il bien vrai que les problèmes élémentaires d'Euclide soient de la plus simple construction possible ? Ne pourrait-on pas décomposer l'élément mathématique en ses éléments fondamentaux, la règle et le compas (...) ? Alors je m'avisai que la règle seule, ne pouvant servir qu'à construire une ligne droite, on peut peut-être n'employer que le compas, non pour décrire seulement un cercle ou un arc, mais en en décrivant plusieurs de différents centres et avec diverses ouvertures, trouver par le moyen des sections mutuelles de ces cercles plusieurs points utiles et précisément les points cherchés de position dans un problème quelconque. J'ai remarqué jusqu'ici que cette branche n'avait encore été cultivée par aucun mathématicien, et que les solutions de ce genre, obtenues par hasard à l'aide du compas seul, auraient été, par leur construction, plus élémentaires que toute autre ».[Mascheroni, *Géométrie du compas*, p. 6-7 pour la tr. fr. de 1803.]

- Mascheroni envisage la règle et le compas non en fonction de leurs visées pratiques, mais par rapport aux propriétés géométriques élémentaires qui leur sont associées.

- Mascheroni envisage la règle et le compas non en fonction de leurs visées pratiques, mais par rapport aux propriétés géométriques élémentaires qui leur sont associées.
- La géométrie du compas seul consiste donc à rechercher les « éléments » de la géométrie euclidienne, c'est-à-dire les connaissances les plus simples — mais non les plus évidentes — qu'il reste à découvrir.

- Mascheroni envisage la règle et le compas non en fonction de leurs visées pratiques, mais par rapport aux propriétés géométriques élémentaires qui leur sont associées.
- La géométrie du compas seul consiste donc à rechercher les « éléments » de la géométrie euclidienne, c'est-à-dire les connaissances les plus simples — mais non les plus évidentes — qu'il reste à découvrir.
- La géométrie du compas constitue une « branche » de la géométrie euclidienne et même la branche la plus fondamentale de la géométrie élémentaire.

- Mascheroni envisage la règle et le compas non en fonction de leurs visées pratiques, mais par rapport aux propriétés géométriques élémentaires qui leur sont associées.
- La géométrie du compas seul consiste donc à rechercher les « éléments » de la géométrie euclidienne, c'est-à-dire les connaissances les plus simples — mais non les plus évidentes — qu'il reste à DÉCOUVRIR.
- La géométrie du compas constitue une « branche » de la géométrie euclidienne et même la branche la plus fondamentale de la géométrie élémentaire.
- Ainsi, Mascheroni propose une étude SYSTÉMATIQUE des constructions au compas seul : sa géométrie du compas constitue donc une THÉORIE relevant des mathématiques pures.

Certes, Mascheroni invoque également les travaux de Graham et de Bird en astronomie ; il entend d'ailleurs s'adresser également à des astronomes dans cet ouvrage.

Certes, Mascheroni invoque également les travaux de Graham et de Bird en astronomie ; il entend d'ailleurs s'adresser également à des astronomes dans cet ouvrage.

Mais les problèmes qu'il résout sont strictement géométriques (division de la circonférence d'un cercle, construction de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle, construction du centre d'un cercle, etc.) abstraction faite de toute application pratique.

Certes, MASCHERONI invoque également les travaux de GRAHAM et de BIRD en astronomie ; il entend d'ailleurs s'adresser également à des astronomes dans cet ouvrage.

Mais les problèmes qu'il résout sont strictement géométriques (division de la circonférence d'un cercle, construction de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle, construction du centre d'un cercle, etc.) abstraction faite de toute application pratique.

Dans sa préface, il met en exergue les deux résultats suivants :

(i) Toute construction à la règle et au compas peut être réalisée au moyen du compas seul (la géométrie à la règle et au compas se RÉDUIT à la géométrie du compas, qui est donc plus ÉLÉMENTAIRE).

(ii) On peut construire au compas seul le centre d'un cercle donné (problème de MASCHERONI, improprement appelé problème de Napoléon).

MASCHERONI souligne la profonde asymétrie entre la règle et le compas :

- les constructions à la règle seule lui semblent triviales (la règle ne sert qu'à « construire des lignes droites ».)
- la règle est un instrument trop contraignant qui ne permettrait pas de découvrir des propriétés géométriques nouvelles,
- la géométrie à la règle et au compas peut être réduite à la géométrie du compas seul, mais non à la géométrie de la règle seule

MASCHERONI souligne la profonde asymétrie entre la règle et le compas :

- les constructions à la règle seule lui semblent triviales (la règle ne sert qu'à « construire des lignes droites ».)
- la règle est un instrument trop contraignant qui ne permettrait pas de découvrir des propriétés géométriques nouvelles,
- la géométrie à la règle et au compas peut être réduite à la géométrie du compas seul, mais non à la géométrie de la règle seule
- la règle serait d'un usage fort imparfait par rapport au compas (une règle n'est pas parfaitement droite et le tracé d'une ligne n'est jamais parfaitement parallèle à la règle)

Motivations de Lambert :

Motivations de LAMBERT : « la perspective repose davantage sur l'usage de la règle que du compas. Elle traite de la grandeur et de la position apparentes des objets visibles et se limite à un seul état et à un seul point de vue. À partir d'un point de vue, on ne peut que mesurer des angles, tracer des lignes et au plus déterminer leurs rapports. Cela vaut peut-être la peine d'*examiner jusqu'où on peut aller en perspective et ensuite aussi en géométrie sans utiliser le compas, la règle seule étant admise*, dans le but donc de rendre linéaires au vrai sens du terme la perspective et la géométrie. Dans un second temps, on peut étudier la manière de réduire au maximum le nombre d'éléments exigeant l'emploi du compas dans la résolution des problèmes ».[J.H. LAMBERT, introduction aux « Quinze problème de géométrie de la règle », in *La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral*, 2ème édition 1774, trad. Laurent et Peiffer.]

LAMBERT se situe dans un tout autre cadre que MASCHERONI :

- il ne se réfère pas préalablement aux constructions à la règle et au compas, pour ensuite en déduire ce que l'on peut faire ou ne pas faire à la règle seule,
- il s'appuie sur la PERSPECTIVE LINÉAIRE et non sur la géométrie euclidienne dans le plan.

LAMBERT se situe dans un tout autre cadre que MASCHERONI :

- il ne se réfère pas préalablement aux constructions à la règle et au compas, pour ensuite en déduire ce que l'on peut faire ou ne pas faire à la règle seule,
- il s'appuie sur la PERSPECTIVE LINÉAIRE et non sur la géométrie euclidienne dans le plan.

LAMBERT ne construit pas une géométrie élémentaire de la règle, mais une GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE PERSPECTIVE :

(i) Les problèmes qu'il résout font intervenir un dispositif issu de la perspective (points de fuite, ligne d'horizon, etc.)

(ii) deux droites « parallèles » représentées en perspective tendent généralement vers un même point de fuite situé sur la ligne d'horizon (parallélisme perspectif) : elles peuvent être construites à la règle seule.

- Mascheroni ne peut pas prendre conscience des possibilités offertes par la géométrie de la règle, car il raisonne d'emblée en géométrie élémentaire.
- La perspective linéaire permet à Lambert de mesurer toute l'effectivité des constructions à la règle seule.

- Mascheroni ne peut pas prendre conscience des possibilités offertes par la géométrie de la règle, car il raisonne d'emblée en géométrie élémentaire.
- La perspective linéaire permet à Lambert de mesurer toute l'effectivité des constructions à la règle seule.

Voilà pourquoi, on ne peut pas étudier les « quinze problèmes » de Lambert indépendamment de la perspective linéaire.

Lambert entend également réduire au maximum l'usage du compas — certaines constructions, possibles, à l'aide du compas deviennent impossibles à la règle seule.

- Mascheroni ne peut pas prendre conscience des possibilités offertes par la géométrie de la règle, car il raisonne d'emblée en géométrie élémentaire.
- La perspective linéaire permet à Lambert de mesurer toute l'effectivité des constructions à la règle seule.

Voilà pourquoi, on ne peut pas étudier les « quinze problèmes » de Lambert indépendamment de la perspective linéaire.

Lambert entend également réduire au maximum l'usage du compas — certaines constructions, possibles, à l'aide du compas deviennent impossibles à la règle seule.

Pourquoi cherche-t-il à réduire cet usage et comment y parvient-il ?

0.4. la règle « et » le compas chez Lambert.

- Pour Mascheroni, la règle était un instrument imparfait ;
- pour Lambert au contraire, l'usage du compas est complexe dans la pratique, car il suppose des mesures sur le terrain.

0.4. la règle « et » le compas chez Lambert.

- Pour MASCHERONI, la règle était un instrument imparfait ;
- pour LAMBERT au contraire, l'usage du compas est complexe dans la pratique, car il suppose des mesures sur le terrain.

« La solution la plus brève sur le papier présuppose souvent des mesures de lignes et d'angles sur le terrain qui peuvent ne pas être réalisables, parce qu'elles nécessitent trop de temps et d'efforts ou sont trop coûteuses ».

0.4. la règle « et » le compas chez Lambert.

- Pour MASCHERONI, la règle était un instrument imparfait ;
- pour LAMBERT au contraire, l'usage du compas est complexe dans la pratique, car il suppose des mesures sur le terrain.

« La solution la plus brève sur le papier présuppose souvent des mesures de lignes et d'angles sur le terrain qui peuvent ne pas être réalisables, parce qu'elles nécessitent trop de temps et d'efforts ou sont trop coûteuses ».

Les avantages du compas en THÉORIE sont des désavantages dans la PRATIQUE. Inversement, l'utilisation de la règle seule conduit à des solutions plus COMPLEXES sur le papier (lorsqu'elles sont possibles), mais plus COMMODES.

0.4. la règle « et » le compas chez Lambert.

- Pour MASCHERONI, la règle était un instrument imparfait ;
- pour LAMBERT au contraire, l'usage du compas est complexe dans la pratique, car il suppose des mesures sur le terrain.

« La solution la plus brève sur le papier présuppose souvent des mesures de lignes et d'angles sur le terrain qui peuvent ne pas être réalisables, parce qu'elles nécessitent trop de temps et d'efforts ou sont trop coûteuses ».

Les avantages du compas en THÉORIE sont des désavantages dans la PRATIQUE. Inversement, l'utilisation de la règle seule conduit à des solutions plus COMPLEXES sur le papier (lorsqu'elles sont possibles), mais plus COMMODES.

Les « quinze problèmes » de LAMBERT ne relèvent pas des « mathématiques pures » : ils facilitent notamment la construction de certaines figures auprès des « artistes ».

Au sens strict, l'utilisation de la règle seule ne permet pas de construire

(i) le milieu d'un segment donné,

(ii) une parallèle à une droite donnée,

(iii) une perpendiculaire à une droite donnée.

Au sens strict, l'utilisation de la règle seule ne permet pas de construire

(i) le milieu d'un segment donné,
(ii) une parallèle à une droite donnée,
(iii) une perpendiculaire à une droite donnée.

En effet, la géométrie de la règle s'identifie à la perspective linéaire qui est une projection centrale. Seules les propriétés conservées par une projection centrale sont constructibles à la règle seule.

Au sens strict, l'utilisation de la règle seule ne permet pas de construire

(i) le milieu d'un segment donné,

(ii) une parallèle à une droite donnée,

(iii) une perpendiculaire à une droite donnée.

En effet, la géométrie de la règle s'identifie à la perspective linéaire qui est une projection centrale. Seules les propriétés conservées par une projection centrale sont constructibles à la règle seule.

Pourtant, parmi les « quinze problèmes » de Lambert, certains consistent par exemple à construire une perpendiculaire à une droite donnée (par ex. le pb. 4) ou une parallèle à une droite donnée (par ex. le pb. 3, le pb. 7, le pb. 10, etc.)

Pour résoudre ce paradoxe, précisons ce que LAMBERT entend par problème à la règle seule :

Pour résoudre ce paradoxe, précisons ce que LAMBERT entend par problème à la règle seule :

Pour LAMBERT, un tel problème :

- ne peut être RÉSOLU qu'en traçant des lignes droites ;
- mais les DONNÉES du problème peuvent impliquer l'usage du compas — réduit au strict minimum.

Pour résoudre ce paradoxe, précisons ce que LAMBERT entend par problème à la règle seule :

Pour LAMBERT, un tel problème :

- ne peut être RÉSOLU qu'en traçant des lignes droites ;
- mais les DONNÉES du problème peuvent impliquer l'usage du compas — réduit au strict minimum.

« j'ai utilisé le compas uniquement pour les constructions géométriques des *Datis* ; l'usage de la règle a été réservé aux solutions apportées ».

- dans le problème III, LAMBERT se donne un parallélogramme,
- dans le problème IV, il se donne un cercle et son centre,
- dans le problème X, il se donne un segment et son milieu.

LAMBERT n'exclut pas totalement l'utilisation du compas. Il s'appuie sur la distinction DONNÉES et SOLUTION du problème pour réduire au maximum l'usage du compas.

LAMBERT n'exclut pas totalement l'utilisation du compas. Il s'appuie sur la distinction DONNÉES et SOLUTION du problème pour réduire au maximum l'usage du compas.

La question essentielle de LAMBERT dans l'élaboration de ses problèmes est donc : quelles sont les données impliquant un usage MINIMAL du compas nécessaires à leur résolution à la règle seule ?

LAMBERT n'exclut pas totalement l'utilisation du compas. Il s'appuie sur la distinction DONNÉES et SOLUTION du problème pour réduire au maximum l'usage du compas.

La question essentielle de LAMBERT dans l'élaboration de ses problèmes est donc : quelles sont les données impliquant un usage MINIMAL du compas nécessaires à leur résolution à la règle seule ?

La question de stricte possibilité ou d'impossibilité — i.e. que peut-on construire à la règle seule ? —, centrale chez MASCHERONI, GAUSS ou encore WANTZEL, est rejetée à la fin des quinze problèmes de LAMBERT :

LAMBERT n'exclut pas totalement l'utilisation du compas. Il s'appuie sur la distinction DONNÉES et SOLUTION du problème pour réduire au maximum l'usage du compas.

La question essentielle de LAMBERT dans l'élaboration de ses problèmes est donc : quelles sont les données impliquant un usage MINIMAL du compas nécessaires à leur résolution à la règle seule ?

La question de stricte possibilité ou d'impossibilité — i.e. que peut-on construire à la règle seule ? —, centrale chez MASCHERONI, GAUSS ou encore WANTZEL, est rejetée à la fin des quinze problèmes de LAMBERT :

« La question principale reste de savoir si l'on *peut partager les lignes en parties égales ou tracer une parallèle à celles-ci à l'aide de la règle seulement, sans construction annexe* ».

0.5. Les usages de la règle et « les » géométries. On ne saurait interpréter l'annexe de LAMBERT en termes de RÉSULTATS, Sinon, on pourrait croire qu'il identifie en théorie ce que l'on PEUT construire à la règle seule. Cette question demeure OUVERTE à la fin de son ouvrage.

0.5. Les usages de la règle et « les » géométries. On ne saurait interpréter l'annexe de LAMBERT en termes de RÉSULTATS, Sinon, on pourrait croire qu'il identifie en théorie ce que l'on PEUT construire à la règle seule. Cette question demeure OUVERTE à la fin de son ouvrage.

En réalité, il convient de revenir sur les USAGES de la règle seule par LAMBERT :

- ces usages sont relatifs aux données des problèmes (ces données présupposant l'intervention d'autres instruments : compas, empan, etc.)
- LAMBERT mesure empiriquement les POTENTIALITÉS de la règle seule en faisant varier ces données.
- ces usages sont pratiques : les « artistes » et les ingénieurs peuvent utiliser les constructions de LAMBERT pour tracer commodément certaines figures.

0.5. Les usages de la règle et « les » géométries. On ne saurait interpréter l'annexe de LAMBERT en termes de RÉSULTATS, Sinon, on pourrait croire qu'il identifie en théorie ce que l'on PEUT construire à la règle seule. Cette question demeure OUVERTE à la fin de son ouvrage.

En réalité, il convient de revenir sur les USAGES de la règle seule par LAMBERT :

- ces usages sont relatifs aux données des problèmes (ces données présupposant l'intervention d'autres instruments : compas, empan, etc.)
- LAMBERT mesure empiriquement les POTENTIALITÉS de la règle seule en faisant varier ces données.
- ces usages sont pratiques : les « artistes » et les ingénieurs peuvent utiliser les constructions de LAMBERT pour tracer commodément certaines figures.

La cohérence des quinze problèmes se pose moins en termes de résultats que d'usages.

Dans son ouvrage de 1797, Mascheroni construit une seule géométrie : la géométrie du compas à laquelle se réduit la géométrie élémentaire (à la règle et au compas).

Dans son ouvrage de 1797, Mascheroni construit une seule géométrie : la géométrie du compas à laquelle se réduit la géométrie élémentaire (à la règle et au compas).

Peut-on parler d'une géométrie ou de plusieurs géométries chez Lambert ?

Dans son ouvrage de 1797, MASCHERONI construit une seule géométrie : la géométrie du compas à laquelle se réduit la géométrie élémentaire (à la règle et au compas).

Peut-on parler d'une géométrie ou de plusieurs géométries chez LAMBERT ?

L'emploi du singulier [géométrie de la règle] est trompeur : si l'on tient compte des données de chacun des quinze problèmes, on aboutit effectivement à plusieurs géométries :

- les problèmes 1 et 5 sont fondés sur la règle seule,
- les problèmes 4 et 9 relèvent de la géométrie du cercle et de la règle,
- les problèmes 6 et 10 exigent le report de longueurs,
- le problème 14 nécessite l'usage d'un bissecteur.

Dans son ouvrage de 1797, MASCHERONI construit une seule géométrie : la géométrie du compas à laquelle se réduit la géométrie élémentaire (à la règle et au compas).

Peut-on parler d'une géométrie ou de plusieurs géométries chez LAMBERT ?

L'emploi du singulier [géométrie de la règle] est trompeur : si l'on tient compte des données de chacun des quinze problèmes, on aboutit effectivement à plusieurs géométries :

- les problèmes 1 et 5 sont fondés sur la règle seule,
- les problèmes 4 et 9 relèvent de la géométrie du cercle et de la règle,
- les problèmes 6 et 10 exigent le report de longueurs,
- le problème 14 nécessite l'usage d'un bissecteur.

LAMBERT construit de proche en proche DES géométries équivalentes ou « plus faibles » que la géométrie élémentaire [à la règle et au compas].

0.6. Plan de l'exposé.

0.6. Plan de l'exposé.

Première partie : spécificité de l'approche de Lambert en perspective.

0.6. Plan de l'exposé.

PREMIÈRE PARTIE : spécificité de l'approche de LAMBERT en perspective.

- situation par rapport aux travaux de TAYLOR en perspective
- un intérêt pour la PRATIQUE de la perspective et non pas seulement pour les applications pratiques d'une « théorie » de la perspective.
- Un lecteur implicite à la fois mathématicien et « artiste » dans la *Freye Perspektive* (première éd. 1759, seconde édition 1774).
- Les implications de cette approche et des lecteurs visés par LAMBERT dans l'interprétation des quinze problèmes de géométrie à la règle seule.
  (a) ex. du problème 1.
  (b) ex. du problème 5.

DEUXIÈME PARTIE : géométrie de la règle et « géométries ».

- analyse de la CONTRAINTE de la règle seule,
- le compas et la règle : les DONNÉES d'un problème et sa RÉSOLUTION,

DEUXIÈME PARTIE : géométrie de la règle et « géométries ».

- analyse de la CONTRAINTE de la règle seule,
- le compas et la règle : les DONNÉES d'un problème et sa RÉSOLUTION,
- vers une classification des quinze problèmes en fonction :
  - (i) de la nature des données,
  - (ii) du rapport au dispositif de la perspective

Deuxième partie : géométrie de la règle et « géométries ».

- analyse de la contrainte de la règle seule,
- le compas et la règle : les données d'un problème et sa résolution,
- vers une classification des quinze problèmes en fonction :
  (i) de la nature des données,
  (ii) du rapport au dispositif de la perspective
- les géométries qui peuvent dériver de ces problèmes :
  (a) géométrie de la règle seule
  (b) géométrie à la règle et au bissecteur
  (c) géométrie à la règle et à l'empan
  (d) géométrie du cercle et de la règle

TROISIÈME PARTIE : les réceptions de la géométrie de la règle de LAMBERT.

Troisième partie : les réceptions de la géométrie de la règle de Lambert.

- Critique d'une survalorisation de « l'influence » de Lambert sur l'école française de géométrie (Hachette, Brianchon, Poncelet, Chasles, etc.)

Troisième partie : les réceptions de la géométrie de la règle de Lambert.

- Critique d'une survalorisation de « l'influence » de Lambert sur l'école française de géométrie (Hachette, Brianchon, Poncelet, Chasles, etc.)
- La « modernité » de Lambert selon Poncelet et Chasles : Lambert comme figure tutélaire des méthodes synthétiques en géométrie.
- Lien avec la géométrie du cercle et de la règle de Steiner ?

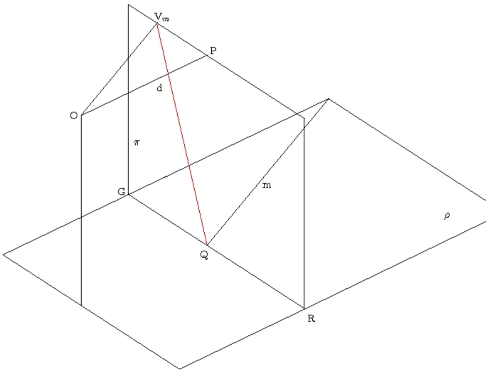
TROISIÈME PARTIE : les réceptions de la géométrie de la règle de LAMBERT.

- Critique d'une survalorisation de « l'influence » de LAMBERT sur l'école française de géométrie (HACHETTE, BRIANCHON, PONCELET, CHASLES, etc.)
- La « modernité » de LAMBERT selon PONCELET et CHASLES : LAMBERT comme figure tutélaire des méthodes synthétiques en géométrie.
- Lien avec la géométrie du cercle et de la règle de STEINER ?
- La règle et l'empan : la référence à la géométrie de la règle de LAMBERT dans la thèse de FELDBLUM (élève de HILBERT) : *Über Elementar-geometrische Constructionen* (1899).

première partie : la *Freye Perspective* de Lambert.

I.0. Terminologie sur la perspective

- le plan géométral ρ
- le plan du tableau π
- la ligne de terre (GR)
- la ligne d'horizon (V_mP)
- le point de vue O
- le point de fuite principal P



- Le point de vue O correspond au sommet du cône visuel.
- Le point de fuite principal P est le pied de la perpendiculaire issue de l'œil sur le tableau. Les images en perspective des droites perpendiculaires à la ligne de terre convergent vers P.

- Le point de vue O correspond au sommet du cône visuel.
- Le point de fuite principal P est le pied de la perpendiculaire issue de l'œil sur le tableau. Les images en perspective des droites perpendiculaires à la ligne de terre convergent vers P.
- La figure à représenter est située dans le plan géométral.
- Son image en perspective se trouve sur le plan du tableau.
- Les différents points de fuite se situent sur la ligne d'horizon.
- On tire la parallèle à la droite m passant par O. Elle coupe la ligne d'horizon en V_m

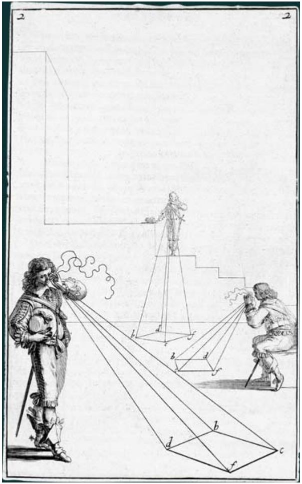
- Le point de vue O correspond au sommet du cône visuel.
- Le point de fuite principal P est le pied de la perpendiculaire issue de l'œil sur le tableau. Les images en perspective des droites perpendiculaires à la ligne de terre convergent vers P.
- La figure à représenter est située dans le plan géométral.
- Son image en perspective se trouve sur le plan du tableau.
- Les différents points de fuite se situent sur la ligne d'horizon.
- On tire la parallèle à la droite m passant par O. Elle coupe la ligne d'horizon en V_m

Mathématiquement, une perspective est une projection centrale de centre O.

- Le point de vue O correspond au sommet du cône visuel.
- Le point de fuite principal P est le pied de la perpendiculaire issue de l'œil sur le tableau. Les images en perspective des droites perpendiculaires à la ligne de terre convergent vers P.
- La figure à représenter est située dans le plan géométral.
- Son image en perspective se trouve sur le plan du tableau.
- Les différents points de fuite se situent sur la ligne d'horizon.
- On tire la parallèle à la droite m passant par O. Elle coupe la ligne d'horizon en V_m

Mathématiquement, une perspective est une projection centrale de centre O.

La figure précédente illustre le théorème fondamental de la perspective établi par GUIDOBALDO en 1600 et repris par TAYLOR en 1719 : l'image en perspective d'une ligne m qui n'est pas parallèle au plan du tableau π converge vers le point V_m.



A. Bosse, *les Perspecteurs*, gravure, in *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petit pied*, 1647-1648.

I.1. sources de Lambert et situation de ses travaux sur la perspective dans son œuvre.

Difficulté à identifier les sources de LAMBERT. Dans la première éd. de *La perspective*, il n'en mentionne aucune.

I.1. sources de Lambert et situation de ses travaux sur la perspective dans son œuvre.

Difficulté à identifier les sources de LAMBERT. Dans la première éd. de *La perspective*, il n'en mentionne aucune.

- Précepteur auprès de la famille von Salis entre 1746-1756, il a pu accéder à des traités de perspective dans leur bibliothèque.

I.1. sources de Lambert et situation de ses travaux sur la perspective dans son œuvre.

Difficulté à identifier les sources de LAMBERT. Dans la première éd. de *La perspective*, il n'en mentionne aucune.

- Précepteur auprès de la famille von Salis entre 1746-1756, il a pu accéder à des traités de perspective dans leur bibliothèque.
- LAMBERT possédait un exemplaire de la traduction en français (1757) du traité de perspective de B. TAYLOR (1715 pour la première éd., 1719 pour la seconde éd.).

I.1. sources de Lambert et situation de ses travaux sur la perspective dans son œuvre.

Difficulté à identifier les sources de LAMBERT. Dans la première éd. de *La perspective*, il n'en mentionne aucune.

- Précepteur auprès de la famille von Salis entre 1746-1756, il a pu accéder à des traités de perspective dans leur bibliothèque.
- LAMBERT possédait un exemplaire de la traduction en français (1757) du traité de perspective de B. TAYLOR (1715 pour la première éd., 1719 pour la seconde éd.).
- Dans son histoire de la perspective (seconde éd. de *La perspective*, 1774), LAMBERT est plus prolixe sur ses sources (référence à L. DE VINCI, A. DÜRER, G. DESARGUES, A. BOSSE, B. TAYLOR, etc.)

Dans l'édition de 1774 de *La perspective*, LAMBERT accueille avec circonspection le traité de TAYLOR :

Dans l'édition de 1774 de *La perspective*, LAMBERT accueille avec circonspection le traité de TAYLOR :

(a) Ce dernier aborderait immédiatement une situation (trop) générale, le plan du tableau étant d'emblée supposé incliné.

(b) TAYLOR utilise une nouvelle terminologie que LAMBERT juge superflue.

Dans l'édition de 1774 de *La perspective*, LAMBERT accueille avec circonspection le traité de TAYLOR :

(a) Ce dernier aborderait immédiatement une situation (trop) générale, le plan du tableau étant d'emblée supposé incliné.

(b) TAYLOR utilise une nouvelle terminologie que LAMBERT juge superflue.

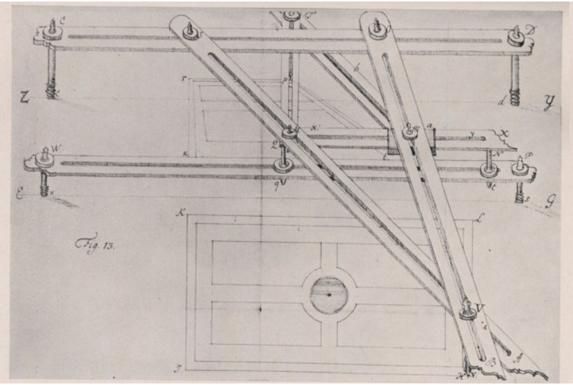
TAYLOR organise son ouvrage à la manière d'un traité de géométrie. LAMBERT n'adopte pas ce mode de présentation et il procède de la situation la mieux connue des artistes (plan du tableau perpendiculaire au plan géométral), à la situation la plus générale (plan du tableau incliné).

- Les publications de LAMBERT (1726-1777) sur la perspective couvrent une large période de son œuvre

- Les publications de LAMBERT (1726-1777) sur la perspective couvrent une large période de son œuvre

(a) *Anlage zur Perspektive*, (1752) :
  - projet de PERSPECTOGRAPHE = instrument muni de bras articulés produisant un dessin en perspective en suivant les contours de la figure sur le plan géométral,
  - projet de COMPAS DE PROPORTION = instrument permettant de mesurer le raccourcissement d'un segment représenté en perspective.

(b) *La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral*, (1759) publication en allemand et en français : l'objectif de LAMBERT est de proposer une « nouvelle » méthode de construction en perspective fondée sur une échelle d'angles et non plus sur des géométraux.



J.-H. Lambert, *Perspectographe*, in *Anlage zur Perspektive*, 1752.

(c) *Sur la perspective aérienne*, (1774) : article consacré à la PERSPECTIVE AÉRIENNE, c'est-à-dire la « dégradation de la couleur des objets par rapport à leur *éloignement* et à la *constitution* de l'atmosphère ».

(d) Seconde édition de *La perspective* (1774) avec deux annexes : (i) une histoire de la perspective, (ii) les quinze problèmes de géométrie à la règle et des compléments sur les représentations des surfaces réfléchissantes.

(c) *Sur la perspective aérienne*, (1774) : article consacré à la PERSPECTIVE AÉRIENNE, c'est-à-dire la « dégradation de la couleur des objets par rapport à leur *éloignement* et à la *constitution* de l'atmosphère ».

(d) Seconde édition de *La perspective* (1774) avec deux annexes : (i) une histoire de la perspective, (ii) les quinze problèmes de géométrie à la règle et des compléments sur les représentations des surfaces réfléchissantes.

- LAMBERT investit « tous » les aspects de la perspective :
  - pratique de la perspective,
  - méthodes de construction,
  - perspectives linéaire et aérienne,
  - étude des propriétés géométriques des figures en perspective, etc.

Lambert considère la perspective à cinq niveaux :

(a) *niveau pratique* : comment faire en sorte que l'usage de la perspective soit simple et commode ?

LAMBERT considère la perspective à cinq niveaux :

(a) *niveau pratique* : comment faire en sorte que l'usage de la perspective soit simple et commode ?

(b) *niveau philosophique* : quel est le statut des APPARENCES (représentations en perspective) par rapport au RÉEL ?

LAMBERT considère la perspective à cinq niveaux :

(a) *niveau pratique* : comment faire en sorte que l'usage de la perspective soit simple et commode ?

(b) *niveau philosophique* : quel est le statut des APPARENCES (représentations en perspective) par rapport au RÉEL ?

(c) *niveau esthétique* : quel est le bon point de vue à adopter pour qu'un paysage nous paraisse beau ?

LAMBERT considère la perspective à cinq niveaux :

(a) *niveau pratique* : comment faire en sorte que l'usage de la perspective soit simple et commode ?

(b) *niveau philosophique* : quel est le statut des APPARENCES (représentations en perspective) par rapport au RÉEL ?

(c) *niveau esthétique* : quel est le bon point de vue à adopter pour qu'un paysage nous paraisse beau ?

(d) *niveau historique* : quelles sont les étapes dans le développement de la perspective ? Peut-on parler de perspective dans l'antiquité gréco-romaine ?

LAMBERT considère la perspective à cinq niveaux :

(a) *niveau pratique* : comment faire en sorte que l'usage de la perspective soit simple et commode ?

(b) *niveau philosophique* : quel est le statut des APPARENCES (représentations en perspective) par rapport au RÉEL ?

(c) *niveau esthétique* : quel est le bon point de vue à adopter pour qu'un paysage nous paraisse beau ?

(d) *niveau historique* : quelles sont les étapes dans le développement de la perspective ? Peut-on parler de perspective dans l'antiquité gréco-romaine ?

(e) *niveau géométrique* : quelles sont propriétés des figures construites en perspective ? Jusqu'à quel point peut-on se passer du compas dans la construction des figures de géométrie élémentaire ? (GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE DE LA RÈGLE).

LAMBERT ne s'intéresse pas seulement à la perspective en géomètre, mais aussi

Lambert ne s'intéresse pas seulement à la perspective en géomètre, mais aussi

- en praticien de l'art (lui-même pratique le dessin, essentiellement des paysages)
- en philosophe (les similitudes entre certains passages de la *perspective* et sa philosophie des apparences ou *phénoménologie* sont frappantes).

LAMBERT ne s'intéresse pas seulement à la perspective en géomètre, mais aussi

- en praticien de l'art (lui-même pratique le dessin, essentiellement des paysages)
- en philosophe (les similitudes entre certains passages de la *perspective* et sa philosophie des apparences ou *phénoménologie* sont frappantes).

Il prolonge également les réflexions de SAVÉRIEN, MONTUCLAT et LESSING sur l'histoire de la perspective.

LAMBERT ne s'intéresse pas seulement à la perspective en géomètre, mais aussi

- en praticien de l'art (lui-même pratique le dessin, essentiellement des paysages)
- en philosophe (les similitudes entre certains passages de la *perspective* et sa philosophie des apparences ou *phénoménologie* sont frappantes).

Il prolonge également les réflexions de SAVÉRIEN, MONTUCLAT et LESSING sur l'histoire de la perspective.

Nous laissons de côté ses réflexions philosophiques, esthétiques et historiques sur la perspective ; notre but est ici de cerner le lien entre perspective linéaire et géométrie de la règle.

I.2. Statut de la perspective par rapport à la géométrie et à l'optique

La perspective linéaire fait-elle partie de la « géométrie » pour LAMBERT ? Il ne détermine pas du statut de la perspective linéaire en fonction de la seule distinction entre mathématiques pures et mathématiques mixtes.

I.2. Statut de la perspective par rapport à la géométrie et à l'optique

La perspective linéaire fait-elle partie de la « géométrie » pour LAMBERT ? Il ne détermine pas du statut de la perspective linéaire en fonction de la seule distinction entre mathématiques pures et mathématiques mixtes.

Définition de la perspective par LAMBERT : « On appelle *Perspective* cette partie de la Peinture qui embrasse [les] règles, pour dessiner un objet quelconque de façon, que le tableau le présente à œil tout comme si on le voyait devant soi ». [*La perspective*, p. 2]

I.2. Statut de la perspective par rapport à la géométrie et à l'optique

La perspective linéaire fait-elle partie de la « géométrie » pour LAMBERT ? Il ne détermine pas du statut de la perspective linéaire en fonction de la seule distinction entre mathématiques pures et mathématiques mixtes.

Définition de la perspective par LAMBERT : « On appelle *Perspective* cette partie de la Peinture qui embrasse [les] règles, pour dessiner un objet quelconque de façon, que le tableau le présente à œil tout comme si on le voyait devant soi ». [*La perspective*, p. 2]

- La perspective est un « Art » et une « partie de la peinture »
- Elle a pour objet l'apparence des choses.

Confrontation à l'article « Mathématique ou mathématiques » [BOUCHER D'ARGIS et D'ALEMBERT] : toute science mathématique a pour objet des grandeurs ou des quantités mesurables.

Confrontation à l'article « Mathématique ou mathématiques » [Boucher d'Argis et D'Alembert] : toute science mathématique a pour objet des grandeurs ou des quantités mesurables.

- les mathématiques PURES se rapportent à des grandeurs abstraites (géométrie, arithmétique, etc.)
- les mathématiques MIXTES se rapportent à des grandeurs concrètes (optique, hydrographie, etc.)

Confrontation à l'article « Mathématique ou mathématiques » [Boucher d'Argis et D'Alembert] : toute science mathématique a pour objet des grandeurs ou des quantités mesurables.

- les mathématiques PURES se rapportent à des grandeurs abstraites (géométrie, arithmétique, etc.)
- les mathématiques MIXTES se rapportent à des grandeurs concrètes (optique, hydrographie, etc.)

Comme la PERSPECTIVE s'intéresse aux grandeurs apparentes des choses, on pourrait la classer du côté des mathématiques mixtes. Elle serait une partie de l'OPTIQUE.
Lambert ne partage pas cette idée :

- la perspective est avant tout un ART ou une technique de représentation.
- elle s'attache aux seules APPARENCES des choses et non à leur ÊTRE.

LAMBERT insiste sur la ligne de partage entre

- la GÉOMÉTRIE qui est censée rendre raison de l'être même des choses
- et la PERSPECTIVE qui en reste à leurs seules APPARENCES.

LAMBERT insiste sur la ligne de partage entre

- la GÉOMÉTRIE qui est censée rendre raison de l'être même des choses
- et la PERSPECTIVE qui en reste à leurs seules APPARENCES.

Alors que la PERSPECTIVE demeure attachée aux apparences des choses, l'OPTIQUE remonte aux principes qui gouvernent en vérité les apparences visuelles.

« L'Optique nous développe les principes, pour démêler les apparences de la vérité, et pour conclure de ce qu'un objet paraît être à ce qu'il est en effet. La perspective évite la réalité et ne s'attache qu'à l'apparence ».

En raison de son attachement aux APPARENCES, la perspective se situe en dehors de la mathématique, même si les procédés de construction en perspective peuvent être mathématisés.

Comment situer la *géométrie perspective de la règle* par rapport à la géométrie et à la perspective ?

- la géométrie de la règle étudie les propriétés géométriques des figures en perspective. Elle fait abstraction des questions de ressemblance à l'apparence des choses.
- elle fait intervenir les éléments du dispositif de la perspective : ligne d'horizon, ligne de terre, points de fuite, etc.
- LAMBERT élabore cette géométrie en se référant à ses éventuels usages par les artistes.

Comment situer la *géométrie perspective de la règle* par rapport à la géométrie et à la perspective ?

- la géométrie de la règle étudie les propriétés géométriques des figures en perspective. Elle fait abstraction des questions de ressemblance à l'apparence des choses.
- elle fait intervenir les éléments du dispositif de la perspective : ligne d'horizon, ligne de terre, points de fuite, etc.
- LAMBERT élabore cette géométrie en se référant à ses éventuels usages par les artistes.

La géométrie perspective de la règle appartient bien à la mathématique, mais il s'agit d'une GÉOMÉTRIE PRATIQUE. Les mêmes questions de SIMPLICITÉ PRATIQUE se posent d'ailleurs

- dans la préface de *La Perspective* (1759)
- dans l'introduction aux quinze problèmes de géométrie de règle.

I.3. Objectifs, lecteur implicite et structure de *La perspective*.
Motivation PRATIQUE pour justifier un emploi minimal du compas au profit de la règle seule : « la solution la plus brève sur le papier présuppose souvent des mesures de lignes et d'angles sur le terrain qui peuvent ne pas être réalisables ».

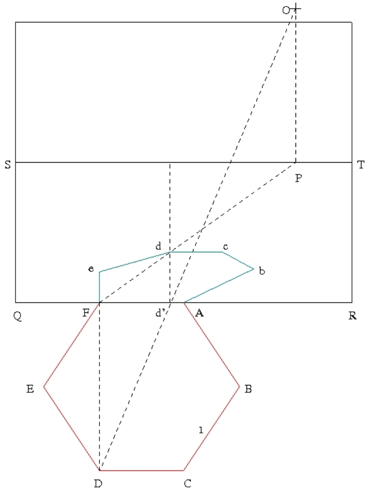
I.3. Objectifs, lecteur implicite et structure de *La perspective*.
Motivation PRATIQUE pour justifier un emploi minimal du compas au profit de la règle seule : « la solution la plus brève sur le papier présuppose souvent des mesures de lignes et d'angles sur le terrain qui peuvent ne pas être réalisables ».

Motivation PRATIQUE pour légitimer une méthode de construction en perspective sans géométraux : « Pour dessiner une figure tant soit peu composée, on se voyait obligé d'en tracer un plan géométral, et de s'en servir pour le mettre en perspective. (...) Et quand même on se soumettait à l'incommodité du plan géométrique, il s'y joignait une autre c'est qu'il fallait tirer nombre de figures superflues, pour déterminer la position d'un seul point, et chaque nouveau point demandait qu'on répétât le même travail ».

Problème : construire un hexagone en perspective à l'aide du plan géométral.

Pour construire d :

- mener la perp. à (QR) passant par D,
- elle coupe (QR) en F ;
- tracer (FP),
- tracer (DO) coupant (QR) en d',
- mener la perp. à (QR) passant par d',
- elle coupe (FP) en d.



L'objectif de l'ouvrage de Lambert est donc pratique et non pas théorique. Lambert est conscient des difficultés techniques liées à l'usage de géométraux.

L'objectif de l'ouvrage de LAMBERT est donc pratique et non pas théorique. LAMBERT est conscient des difficultés techniques liées à l'usage de géométraux.

Il s'adresse à des connaisseurs en art et des artistes et non pas seulement à des géomètres.

L'objectif de l'ouvrage de LAMBERT est donc pratique et non pas théorique. LAMBERT est conscient des difficultés techniques liées à l'usage de géométraux.

Il s'adresse à des connaisseurs en art et des artistes et non pas seulement à des géomètres.

« [la perspective] se recommande d'elle-même à quiconque fait de la peinture ou du dessin son occupation principale, ou qui n'y destine que quelques heures qu'il veut employer à un amusement agréable ; et tous ceux, qui s'appliquent à être connaisseurs en tableaux, y trouvent de quoi raffiner sur les jugements qu'ils en font ».

L'objectif de l'ouvrage de LAMBERT est donc pratique et non pas théorique. LAMBERT est conscient des difficultés techniques liées à l'usage de géométraux.

Il s'adresse à des connaisseurs en art et des artistes et non pas seulement à des géomètres.

« [la perspective] se recommande d'elle-même à quiconque fait de la peinture ou du dessin son occupation principale, ou qui n'y destine que quelques heures qu'il veut employer à un amusement agréable ; et tous ceux, qui s'appliquent à être connaisseurs en tableaux, y trouvent de quoi raffiner sur les jugements qu'ils en font ».

Différences avec TAYLOR :

- LAMBERT n'aborde pas d'emblée la situation plus générale des plans inclinés qu'il juge trop abstraite pour les artistes.
- Contrairement à TAYLOR, il n'ordonne pas son traité en définitions, axiomes et théorèmes.

Le plan de *La Perspective* montre que LAMBERT veut réformer systématiquement l'enseignement et la pratique de la perspective.

Le plan de *La Perspective* montre que LAMBERT veut réformer systématiquement l'enseignement et la pratique de la perspective.

- section 1 : principes de la perspective et problèmes de construction élémentaires.
- section 2 : réflexions esthétiques sur les point de vue du spectateur par rapport au tableau.
- section 3 : instruments qui peuvent aider aux constructions en perspective (par ex. le COMPAS DE PROPORTION).
- section 4 : exemples plus complexes de constructions en perspective.

Le plan de *La Perspective* montre que LAMBERT veut réformer systématiquement l'enseignement et la pratique de la perspective.

- section 1 : principes de la perspective et problèmes de construction élémentaires.
- section 2 : réflexions esthétiques sur les point de vue du spectateur par rapport au tableau.
- section 3 : instruments qui peuvent aider aux constructions en perspective (par ex. le COMPAS DE PROPORTION).
- section 4 : exemples plus complexes de constructions en perspective.
- section 5 : validité des méthodes de LAMBERT pour les plans inclinés.
- section 6 : réflexions sur le plan du tableau et exemples pour éclaircir les règles de la projection dans le cas des plans inclinés.
- section 7 : projection orthographique.

Le plan de *La Perspective* montre que LAMBERT veut réformer systématiquement l'enseignement et la pratique de la perspective.

- section 1 : principes de la perspective et problèmes de construction élémentaires.
- section 2 : réflexions esthétiques sur les point de vue du spectateur par rapport au tableau.
- section 3 : instruments qui peuvent aider aux constructions en perspective (par ex. le COMPAS DE PROPORTION).
- section 4 : exemples plus complexes de constructions en perspective.
- section 5 : validité des méthodes de LAMBERT pour les plans inclinés.
- section 6 : réflexions sur le plan du tableau et exemples pour éclaircir les règles de la projection dans le cas des plans inclinés.
- section 7 : projection orthographique.
- section 8 : le problème inverse, étant donné une figure en perspective, trouver son image sur le plan géométral.

Les lecteurs visés par Lambert sont donc artistes, connaisseurs en art, géomètres.

Les lecteurs visés par Lambert sont donc artistes, connaisseurs en art, géomètres.

Qu'en est-il de la réception effective de son traité en Allemagne ?

(a) Le mathématicien allemand Karsten (1732-1787) publie *Die Perspectiv* en 1775.
   - reprise de la méthode de Lambert,
   - développements sur le compas de proportion.

Les lecteurs visés par LAMBERT sont donc artistes, connaisseurs en art, géomètres.

Qu'en est-il de la réception effective de son traité en Allemagne ?

(a) Le mathématicien allemand KARSTEN (1732-1787) publie *Die Perspectiv* en 1775.
  - reprise de la méthode de LAMBERT,
  - développements sur le compas de proportion.

(b) L'esthète suisse J.-G. SULZER (1720-1799) (mbre de l'Aca. des sciences de Berlin dès 1750) incorpore les idées de LAMBERT dans son *Allgemeine Theorie der schönen Künste*.

Les lecteurs visés par LAMBERT sont donc artistes, connaisseurs en art, géomètres.

Qu'en est-il de la réception effective de son traité en Allemagne ?

(a) Le mathématicien allemand KARSTEN (1732-1787) publie *Die Perspectiv* en 1775.
   - reprise de la méthode de LAMBERT,
   - développements sur le compas de proportion.

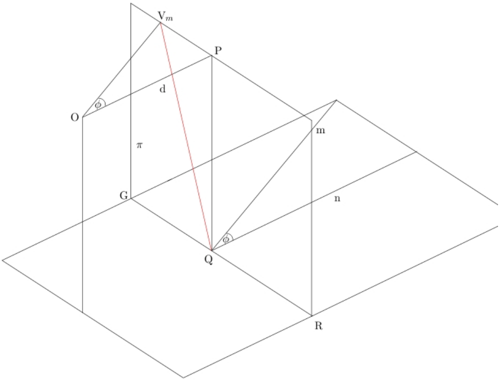
(b) L'esthète suisse J.-G. SULZER (1720-1799) (mbre de l'Aca. des sciences de Berlin dès 1750) incorpore les idées de LAMBERT dans son *Allgemeine Theorie der schönen Künste*.

(c) Le mathématicien B. F. MÖNNICH (1741-1800), également mbre de l'Aca. de Berlin, donne des leçons sur la perspective à l'*Akademie der Künste* en 1794 en se fondant sur les idées de LAMBERT.

Le traité de LAMBERT a donc eu une incidence dans l'enseignement de la perspective au sein des académies d'art allemandes.

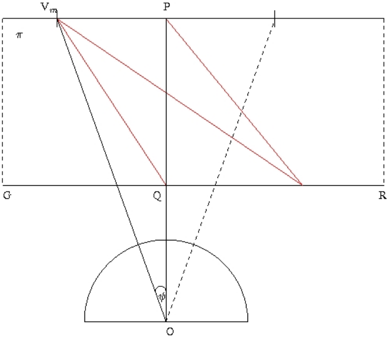
I.4. La méthode de Lambert

Problème : sans s'aider du plan géométral, construire l'image en perspective d'une droite *m* qui forme un angle de degré ϕ par rapport à une normale *n* à la ligne de terre.



Les données :

- le point de vue O
- la ligne de terre (GR)
- la ligne d'horizon $(V_m P)$
- le point de fuite principal P
- une échelle d'angle.



(1) On trace la ligne OP. Elle coupe la ligne de terre (GR) en Q.

(1) On trace la ligne OP. Elle coupe la ligne de terre (GR) en Q.

(2) On repère le point V_m correspondant à la mesure d'angle ψ sur la ligne d'horizon.

(1) On trace la ligne OP. Elle coupe la ligne de terre (GR) en Q.

(2) On repère le point V_m correspondant à la mesure d'angle ψ sur la ligne d'horizon.

(3) On trace directement la ligne joignant le point V_m au point Q.

(1) On trace la ligne OP. Elle coupe la ligne de terre (GR) en Q.
(2) On repère le point V_m correspondant à la mesure d'angle ψ sur la ligne d'horizon.
(3) On trace directement la ligne joignant le point V_m au point Q.
(4) La ligne V_mQ est la solution recherchée.

(1) On trace la ligne OP. Elle coupe la ligne de terre (GR) en Q.

(2) On repère le point V_m correspondant à la mesure d'angle ψ sur la ligne d'horizon.

(3) On trace directement la ligne joignant le point V_m au point Q.

(4) La ligne V_mQ est la solution recherchée.

- Nous n'avons donc pas eu besoin de tracer sur le plan géométral la droite dont V_mQ est l'image en perspective.

Cette méthode de construction à l'aide d'une échelle d'angle n'est pas inédite.

Cette méthode de construction à l'aide d'une échelle d'angle n'est pas inédite.

(a) Elle est établie par Aleaume et Migon durant le second quart du XVII^{e} siècle. (cf. *La perspective spéculative et pratique* (1643) de Migon, inspiré par les manuscrits d'Aleaume).

Cette méthode de construction à l'aide d'une échelle d'angle n'est pas inédite.

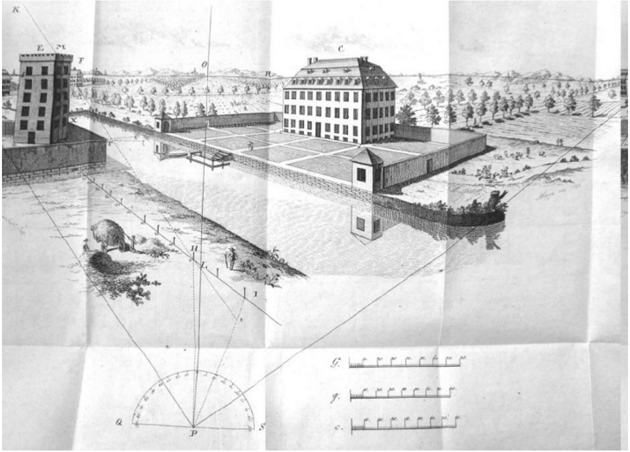
(a) Elle est établie par Aleaume et Migon durant le second quart du XVII^{e} siècle. (cf. *La perspective spéculative et pratique* (1643) de Migon, inspiré par les manuscrits d'Aleaume).
(b) Elle est développée et généralisée par Lacaille (1713-1762), mathématicien français connu pour ses mesures astronomiques et géodésiques.

Cette méthode de construction à l'aide d'une échelle d'angle n'est pas inédite.

(a) Elle est établie par ALEAUME et MIGON durant le second quart du XVII^e siècle. (cf. *La perspective spéculative et pratique* (1643) de MIGON, inspiré par les manuscrits d'ALEAUME).

(b) Elle est développée et généralisée par LACAILLE (1713-1762), mathématicien français connu pour ses mesures astronomiques et géodésiques.
  - En 1741, LACAILLE devient membre de l'*Aca. royale des sciences*.
  - En 1756, il publie un *Traité d'optique* accompagné d'un court traité de perspective.
  - Il développe alors une méthode de construction dite « par le chassis perspectif » fondée sur une mesure d'angle.

LAMBERT découvre le traité de LACAILLE après la parution de *La perspective*. Il reconnaît la priorité des découvertes établies par celui-ci. En revanche il ignore l'existence des travaux de MIGON et ALEAUME.



Paysage tiré des *Grundsätze der Perspektive aus Betrachtung einer perspektivisch gezeichneten Landschaft abgeleitet* de LAMBERT (1771, éd. en 1799)

I.5. Quel rapport entre le traité de Lambert et son annexe sur la géométrie de la règle ?

I.5. Quel rapport entre le traité de Lambert et son annexe sur la géométrie de la règle ?

- Les 15 problèmes mettent en jeu le dispositif de la perspective (ligne d'horizon, ligne de terre, points de fuite, etc.)
- Ils supposent une bonne connaissance des rapports entre une figure et son image en perspective (problème de construction en perspective et problème inverse).
- Certains ont une finalité pratique immédiate puisqu'ils facilitent le tracé de certaines images en perspective.

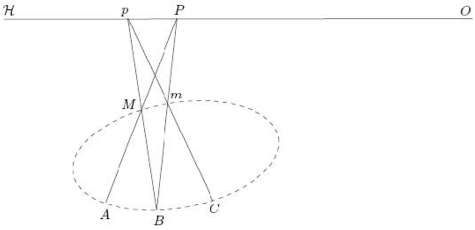
I.5. Quel rapport entre le traité de Lambert et son annexe sur la géométrie de la règle ?

- Les 15 problèmes mettent en jeu le dispositif de la perspective (ligne d'horizon, ligne de terre, points de fuite, etc.)
- Ils supposent une bonne connaissance des rapports entre une figure et son image en perspective (problème de construction en perspective et problème inverse).
- Certains ont une finalité pratique immédiate puisqu'ils facilitent le tracé de certaines images en perspective.

On ne peut donc pas étudier les quinze problèmes sans se référer au contenu et au lecteur implicite du traité de LAMBERT.

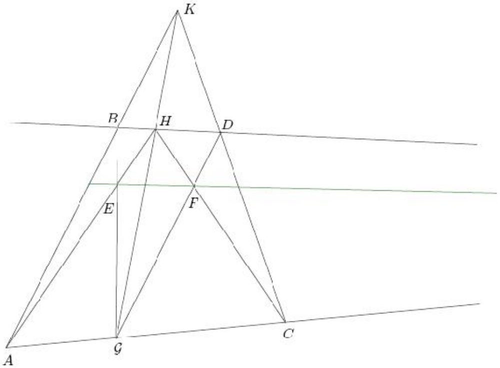
Exemple. Problème 1 : étant donné une ligne d'horizon et quatre points trois à trois non alignés, tel que l'un quelconque de ces points ne soit pas contenu dans le triangle plein formé par les trois autres, construire point par point une ellipse à la règle seule.

- référence à une ligne d'horizon
- Pour justifier sa solution, LAMBERT se fonde sur le cercle dont cette ellipse est l'image
- Les praticiens peuvent repérer avec exactitude des points sur l'ellipse à tracer.



Exemple. Problème 5 : étant donné deux lignes (AB) et (CD) qui convergent vers un point de fuite placé en dehors du tableau, tracer une ligne passant par un point E situé entre ces deux lignes et convergeant vers ce même point de fuite, sans la prolonger jusqu'à lui.

- référence à un point de fuite
- Finalité pratique : les points de fuite sont souvent situés en dehors du tableau.



Deuxième partie : étude et classification des quinze problèmes

II.1. La « contrainte » de la règle seule.

Quelle spécificité Lambert accorde-t-il à la règle par rapport aux autres instruments (compas, perspectographe, compas de proportion) ?

Deuxième partie : étude et classification des quinze problèmes

II.1. La « contrainte » de la règle seule.

Quelle spécificité LAMBERT accorde-t-il à la règle par rapport aux autres instruments (COMPAS, PERSPECTOGRAPHE, COMPAS DE PROPORTION) ?

- LAMBERT exclut l'usage du compas pour des raisons pratiques et parce que la perspective a pour objet les grandeurs apparentes, non les grandeurs réelles.
- L'élaboration du PERSPECTOGRAPHE et du COMPAS DE PROPORTION présuppose des connaissances mathématiques sur la perspective. Mais la finalité de ces deux instruments est de perfectionner les représentations en perspective.
- La RÈGLE permet en revanche d'étudier les propriétés géométriques des figures tracées en perspective.

La règle est donc à la fois un *instrument de construction* et un *instrument de découverte* qui engendre un nouveau champ d'investigation : la géométrie de la règle perspective.

La règle est donc à la fois un *instrument de construction* et un *instrument de découverte* qui engendre un nouveau champ d'investigation : la géométrie de la règle perspective.

Pour Mascheroni (1797),

(a) la contrainte de la règle seule est trop forte :

- on ne peut tracer que des lignes droites ;
- il devient impossible de tracer la plupart des figures construites à la règle et au compas.

La règle est donc à la fois un *instrument de construction* et un *instrument de découverte* qui engendre un nouveau champ d'investigation : la géométrie de la règle perspective.

Pour MASCHERONI (1797),

(a) la contrainte de la règle seule est trop forte :
   - on ne peut tracer que des lignes droites ;
   - il devient impossible de tracer la plupart des figures construites à la règle et au compas.

(b) en revanche la contrainte du compas seul ne restreint pas la classe des figures que l'on peut construire :
   - Toutes les figures constructibles à la règle et au compas sont constructibles au compas seul,
   - Les solutions au compas seul sont seulement plus longues.

La règle est donc à la fois un *instrument de construction* et un *instrument de découverte* qui engendre un nouveau champ d'investigation : la géométrie de la règle perspective.

Pour MASCHERONI (1797),

(a) la contrainte de la règle seule est trop forte :
  - on ne peut tracer que des lignes droites ;
  - il devient impossible de tracer la plupart des figures construites à la règle et au compas.

(b) en revanche la contrainte du compas seul ne restreint pas la classe des figures que l'on peut construire :
  - Toutes les figures constructibles à la règle et au compas sont constructibles au compas seul,
  - Les solutions au compas seul sont seulement plus longues.

Comment LAMBERT parvient-il à rendre effectif et opératoire l'usage de la règle seule ?

Une « contrainte » est d'abord définie par

- l'EXCLUSION de certains instruments, de certaines opérations, de certains objets
- par des RESTRICTIONS qu'il n'est *a priori* pas évident de *localiser*.

Une « contrainte » est d'abord définie par

- l'EXCLUSION de certains instruments, de certaines opérations, de certains objets
- par des RESTRICTIONS qu'il n'est *a priori* pas évident de *localiser*.

Par exemple, avec le compas seul, la restriction ne se situe pas au niveau des figures que l'on PEUT construire, mais au niveau des ÉTAPES nécessaires pour les construire.

Une « contrainte » est d'abord définie par

- l'EXCLUSION de certains instruments, de certaines opérations, de certains objets
- par des RESTRICTIONS qu'il n'est *a priori* pas évident de *localiser*.

Par exemple, avec le compas seul, la restriction ne se situe pas au niveau des figures que l'on PEUT construire, mais au niveau des ÉTAPES nécessaires pour les construire.

Avec le compas seul, on peut toujours trouver un moyen de substitution pour remplacer la règle. La contrainte du compas seul ne conduit pas à des OBSTACLES insurmontables.

Une « contrainte » est d'abord définie par

- l'EXCLUSION de certains instruments, de certaines opérations, de certains objets
- par des RESTRICTIONS qu'il n'est *a priori* pas évident de *localiser*.

Par exemple, avec le compas seul, la restriction ne se situe pas au niveau des figures que l'on PEUT construire, mais au niveau des ÉTAPES nécessaires pour les construire.

Avec le compas seul, on peut toujours trouver un moyen de substitution pour remplacer la règle. La contrainte du compas seul ne conduit pas à des OBSTACLES insurmontables.

LAMBERT ne sait pas si l'exclusion du compas restreint le champ des figures constructibles.

La contrainte constitue également un moyen pour analyser les POSSIBILITÉS offertes par un instrument ou une opération en propre. Il ne faut donc pas penser la contrainte sous le seul jour de la restriction et de l'exclusion.

La contrainte constitue également un moyen pour analyser les POSSIBILITÉS offertes par un instrument ou une opération en propre. Il ne faut donc pas penser la contrainte sous le seul jour de la restriction et de l'exclusion.

- Il y a deux types de contrainte pour LAMBERT :
  (i) la contrainte sur le terrain
  (ii) la contrainte sur le papier

La contrainte constitue également un moyen pour analyser les POSSIBILITÉS offertes par un instrument ou une opération en propre. Il ne faut donc pas penser la contrainte sous le seul jour de la restriction et de l'exclusion.

- Il y a deux types de contrainte pour LAMBERT :
  (i) la contrainte sur le terrain
  (ii) la contrainte sur le papier
- le compas est un instrument contraignant dans la pratique, car il suppose de faire des mesures sur le terrain.
- en revanche, la règle est contraignante sur le papier, car elle entraîne des étapes de construction supplémentaires, quand cette construction est possible.

(a) Qu'est-ce que la contrainte de la règle autorise ?
- L'alignement de points et les intersections de droites.

(a) Qu'est-ce que la contrainte de la règle autorise ?
  - L'alignement de points et les intersections de droites.

(b) Quand s'impose-t-elle ?
  - Exclusivement dans la résolution des problèmes posés.

(a) Qu'est-ce que la contrainte de la règle autorise ?
  - L'alignement de points et les intersections de droites.

(b) Quand s'impose-t-elle ?
  - Exclusivement dans la résolution des problèmes posés.

(c) Dans quel contexte est-elle formulée ?
  - dans celui de la perspective et non de la géométrie élémentaire.

(a) Qu'est-ce que la contrainte de la règle autorise ?
 - L'alignement de points et les intersections de droites.

(b) Quand s'impose-t-elle ?
 - Exclusivement dans la résolution des problèmes posés.

(c) Dans quel contexte est-elle formulée ?
 - dans celui de la perspective et non de la géométrie élémentaire.

À la différence de MASCHERONI, LAMBERT étudie les constructions à la règle seule dans le contexte de la perspective, et non dans celui de la géométrie élémentaire. C'est pourquoi, il ne juge pas la contrainte de la règle seule stérile.

À côté de la CONTRAINTE de la règle seule interviennent deux LIBERTÉS :

(a) Les données des problèmes peuvent faire intervenir le compas, le bissecteur ou l'empan, ce qui augmente les possibilités de constructions,

À côté de la CONTRAINTE de la règle seule interviennent deux LIBERTÉS :

(a) Les données des problèmes peuvent faire intervenir le compas, le bissecteur ou l'empan, ce qui augmente les possibilités de constructions,

(b) LAMBERT exploite toutes les relations possibles entre figure dans le plan géométral et figure en perspective.

- Tantôt, la construction est menée dans le plan du tableau, mais l'explication qui justifie la solution exige de revenir au plan géométral (ex. pb1, pb2, pb8).
- tantôt, la solution consiste à retrouver certains éléments du dispositif perspectif, par exemple la ligne d'horizon à partir de certaines données telles que la figure dans le plan géométral et la ligne de terre (ex. pb.4)

À côté de la CONTRAINTE de la règle seule interviennent deux LIBERTÉS :

(a) Les données des problèmes peuvent faire intervenir le compas, le bissecteur ou l'empan, ce qui augmente les possibilités de constructions,

(b) LAMBERT exploite toutes les relations possibles entre figure dans le plan géométral et figure en perspective.

- Tantôt, la construction est menée dans le plan du tableau, mais l'explication qui justifie la solution exige de revenir au plan géométral (ex. pb1, pb2, pb8).
- tantôt, la solution consiste à retrouver certains éléments du dispositif perspectif, par exemple la ligne d'horizon à partir de certaines données telles que la figure dans le plan géométral et la ligne de terre (ex. pb.4)
- Tantôt LAMBERT ajoute une contrainte supplémentaire en supprimant la donnée d'un point de fuite (ex. pb.5)
- Tantôt LAMBERT travaille exclusivement dans le plan géométral (ex. pb.9)

Les problèmes formulés par LAMBERT font donc varier la NATURE des objets à construire

- figures en perspective
- ligne d'horizon
- tracés dans le plan géométral à l'aide d'une figure auxiliaire telle que le cercle.

Les problèmes formulés par LAMBERT font donc varier la NATURE des objets à construire

- figures en perspective
- ligne d'horizon
- tracés dans le plan géométral à l'aide d'une figure auxiliaire telle que le cercle.

Ils font également varier les relations entre figure dans le plan géométral et image en perspective :

- construction d'une image en perspective à partir du géométral,
- explication d'une figure en perspective à l'aide du géométral,
- construction directe sans le géométral.

On retrouve là une variabilité qui caractérise le traité de LAMBERT (constructions sans géométral, usage du géométral, problème inverse).

Les moyens pour résoudre ces problèmes demeurent invariablement les mêmes : il s'agit de la règle seule.

Les moyens pour résoudre ces problèmes demeurent invariablement les mêmes : il s'agit de la règle seule.

Les étapes qui président à la résolution de ces problèmes s'organisent dans un ordre qui est contraignant :

- certes plusieurs solutions sont envisageables,
- mais LAMBERT fait en sorte que chaque étape soit strictement et évidemment nécessaire,
- chaque étape conditionne l'une au moins des étapes ultérieures.

Les moyens pour résoudre ces problèmes demeurent invariablement les mêmes : il s'agit de la règle seule.

Les étapes qui président à la résolution de ces problèmes s'organisent dans un ordre qui est contraignant :

- certes plusieurs solutions sont envisageables,
- mais LAMBERT fait en sorte que chaque étape soit strictement et évidemment nécessaire,
- chaque étape conditionne l'une au moins des étapes ultérieures.

Il y a donc deux contraintes sur le papier :

(i) une contrainte liée aux restrictions qu'entraîne l'usage de la règle seule,

(ii) une contrainte liée à l'ordre dans la résolution du problème.

II.2. Critères de classification des problèmes de Lambert

On peut classer les problèmes de LAMBERT en fonction de deux critères :

(a) le type de données (non constructibles à la règle) qu'ils supposent

- par exemple, les problèmes 4 et 9 font intervenir un cercle et son centre (ils seront repris par STEINER dans sa géométrie du cercle et de la règle)

II.2. Critères de classification des problèmes de Lambert

On peut classer les problèmes de LAMBERT en fonction de deux critères :

(a) le type de données (non constructibles à la règle) qu'ils supposent
  - par exemple, les problèmes 4 et 9 font intervenir un cercle et son centre (ils seront repris par STEINER dans sa géométrie du cercle et de la règle)

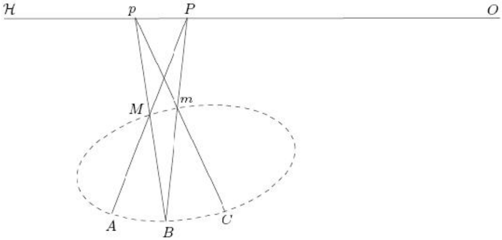
(b) la relation qu'ils entretiennent avec le dispositif perspectif.

Nous nous proposons d'examiner les problèmes 1, 3, 4 et 5 pour mesurer la diversité des configurations étudiées par LAMBERT malgré la contrainte de la règle.

Exemple. Problème 1 : construction d'une ellipse point par point sur le plan du tableau.

A, B, C, M et (HO) sont donnés

- On trace (AM) qui coupe (HO) en P
- On trace (BM) qui coupe (HO) en p
- On trace (BP) et (Cp)
- Elles se coupent en m qui est la solution cherchée



(i) Le problème 1 fait intervenir la règle seule dans la construction des données et dans la solution du problème.

(ii) La construction est effectuée dans le plan du tableau, (HO) tenant lieu de ligne d'horizon.

(iii) Mais la justification de la solution exige de remonter à la figure dans le plan géométral.

(i) Le problème 1 fait intervenir la règle seule dans la construction des données et dans la solution du problème.

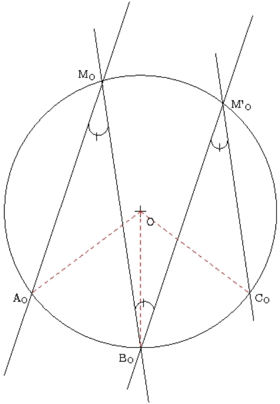
(ii) La construction est effectuée dans le plan du tableau, (HO) tenant lieu de ligne d'horizon.

(iii) Mais la justification de la solution exige de remonter à la figure dans le plan géométral.

« Ce procédé repose sur le fait que AB, BC sont considérés comme des arcs égaux du cercle censé être mis en perspective. Comme AP et BP sont perspectivement parallèles, Mm représente un arc égal du cercle et tous les angles AMB, MBm, BMC, etc. sont des images d'angles égaux ».

Explication à partir du cercle dont cette ellipse est l'image

- Les arcs $A_O B_O$ et $A_O C_O$ sont égaux,
- Les angles $\widehat{A_O O B_O}$ et $\widehat{A_O O C_O}$ sont égaux,
- Les droites $(A_O M_O)$ et $(B_O M'_O)$ sont parallèles
- Les droites $(B_O M_O)$ et $(C_O M'_O)$ sont parallèles
- Les angles $\widehat{A_O M_O B_O}$, $\widehat{M_O B_O M'_O}$ et $\widehat{B_O M'_O C_O}$ sont égaux,
- M'_O se situe sur le cercle (théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre)



Le problème 1 consiste à construire une ellipse point par point en fonction du choix arbitraire d'une ligne d'horizon donnée *au préalable*.

Le problème 1 consiste à construire une ellipse point par point en fonction du choix arbitraire d'une ligne d'horizon donnée *au préalable*.

Lambert ajoute : « on voit sans peine que l'emplacement de l'horizon n'aurait plus été arbitraire si l'on avait ajouté un point m aux quatre points A, B, C, M. Car les lignes (AM), (BM), (Bm), (Cm) suffisent pour déterminer les deux points p, P par lesquels on aurait dû faire passer l'horizon ».

Le problème 1 consiste à construire une ellipse point par point en fonction du choix arbitraire d'une ligne d'horizon donnée *au préalable*.

LAMBERT ajoute : « on voit sans peine que l'emplacement de l'horizon n'aurait plus été arbitraire si l'on avait ajouté un point m aux quatre points A, B, C, M. Car les lignes (AM), (BM), (Bm), (Cm) suffisent pour déterminer les deux points p, P par lesquels on aurait dû faire passer l'horizon ».

Si l'on se donne les cinq points en question, le problème est inversé : il s'agit de trouver l'emplacement de la ligne d'horizon : elle passe par les points p et P, constructibles à la règle seule.

- P est l'intersection des droites (AM) et (Bm)
- p est l'intersection des droites (BM) et (Cm)

Le problème 1 consiste à construire une ellipse point par point en fonction du choix arbitraire d'une ligne d'horizon donnée *au préalable*.

LAMBERT ajoute : « on voit sans peine que l'emplacement de l'horizon n'aurait plus été arbitraire si l'on avait ajouté un point m aux quatre points A, B, C, M. Car les lignes (AM), (BM), (Bm), (Cm) suffisent pour déterminer les deux points p, P par lesquels on aurait dû faire passer l'horizon ».

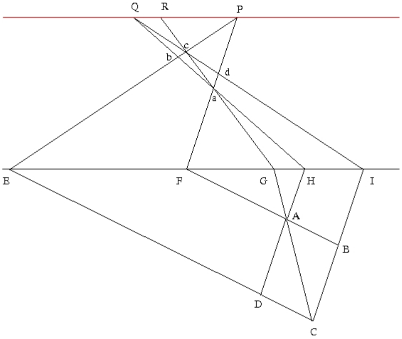
Si l'on se donne les cinq points en question, le problème est inversé : il s'agit de trouver l'emplacement de la ligne d'horizon : elle passe par les points p et P, constructibles à la règle seule.

- P est l'intersection des droites (AM) et (Bm)
- p est l'intersection des droites (BM) et (Cm)

LAMBERT construit ainsi un nouveau problème en faisant varier les données du problème initial.

Exemple. Problème 3 : un parallélogramme étant donné, construire à l'aide d'une règle seulement, par un point P donné, une ligne parallèle à une ligne (EI) donnée.

- On prolonge les côtés de $ABCD$ et la diagonale AC
- Ils coupent (EI) en E, F, G, H, I
- On trace (GR) qlcqe issue de G.
- On trace (PE) et (PF)
- Elles coupent (GR) resp. en c et a
- On trace (Ha) et (Ic)
- Elles se coupent en Q
- (QP) est la ligne recherchée



Explication de LAMBERT : « L'image perspective de $ABCD$ est $abcd$, (EI) est la ligne de terre et (QP) l'horizon ».

Explication de LAMBERT : « L'image perspective de $ABCD$ est $abcd$, (EI) est la ligne de terre et (QP) l'horizon ».

On doit donc reconstituer une partie du dispositif perspectif :

- $ABCD$ est la figure dans le plan géométral
- La droite (EI) est la ligne de terre
- Le point P tient lieu de point de fuite des images (bc) et (ad) des droites parallèles (BC) et (AD)
- Le point Q est le point de fuite des images (ab) et (cd) des droites parallèles (AB) et (CD)
- (QP) passe par deux points de fuite. C'est donc la ligne d'horizon qui est par définition parallèle à la ligne de terre.

Explication de LAMBERT : « L'image perspective de $ABCD$ est $abcd$, (EI) est la ligne de terre et (QP) l'horizon ».

On doit donc reconstituer une partie du dispositif perspectif :

- $ABCD$ est la figure dans le plan géométral
- La droite (EI) est la ligne de terre
- Le point P tient lieu de point de fuite des images (bc) et (ad) des droites parallèles (BC) et (AD)
- Le point Q est le point de fuite des images (ab) et (cd) des droites parallèles (AB) et (CD)
- (QP) passe par deux points de fuite. C'est donc la ligne d'horizon qui est par définition parallèle à la ligne de terre.

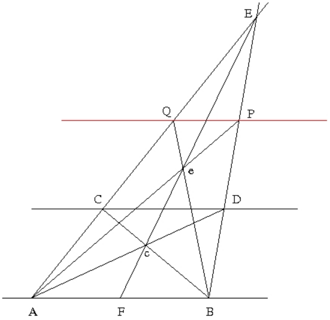
Problème 1 = le dispositif perspectif est donné. La justification de la construction s'appuie sur la figure dans le plan géométral.
Problème 3 = la figure dans le plan géométral est donnée, il faut construire son image en perspective et retrouver la ligne d'horizon.

On peut rendre raison du problème 3 en utilisant le théorème de Thalès. On considère la parallèle à (EI) passant par P. On suppose qu'elle coupe (Ic) en Q et (Ia) en Q'. Il s'agit de montrer que $Q = Q'$.

- comme les droites (FD) et (CE) sont parallèles, on a : $\frac{GF}{GE} = \frac{GA}{GC}$.
- de même les droites (BH) et (CI) sont parallèles : $\frac{GA}{GC} = \frac{GH}{GI}$.
- On a donc : $\frac{GE}{GI} = \frac{GF}{GH}$
- Considérons maintenant la parallèle à (EI) passant par P :
  - i $\frac{RP}{GF} = \frac{aR}{aG} = \frac{QR}{GH}$ donc $\frac{GF}{GH} = \frac{RP}{RQ}$
  - ii $\frac{RP}{GE} = \frac{cR}{cG} = \frac{RQ'}{GI}$ donc $\frac{GE}{GI} = \frac{RP}{RQ'}$
- Autrement dit $RQ = RQ'$ et $Q = Q'$.

Variante du problème 3 : construire à la règle une droite parallèle à deux autres parallèles données et passant par un point donné.

- On prolonge $[BP]$
- On trace une droite issue de A coupant (BP) en E
- $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en c
- On trace (Ec) coupant (AB) en F
- On trace (AP) coupant (Ec) en e
- On trace (Be) coupant (AE) en Q
- (QP) est la solution



LAMBERT interprète cette variante dans le contexte de la perspective comme suit :

LAMBERT interprète cette variante dans le contexte de la perspective comme suit :

« E est alors un point de l'horizon, AB la ligne de terre, CD une parallèle à celle-ci, $ABCD$ l'image d'un rectangle et c son centre ; AE, FE et BE sont perspectivement parallèles et par conséquent $AF = FB$. Le point e représente de même le centre du rectangle $AQPB$, AP et QB ses diagonales, QP le côté parallèle à la ligne de terre ; par conséquent ce parallélisme n'est pas seulement perspectif mais géométrique ».

Lambert interprète cette variante dans le contexte de la perspective comme suit :

« E est alors un point de l'horizon, AB la ligne de terre, CD une parallèle à celle-ci, $ABCD$ l'image d'un rectangle et c son centre ; AE, FE et BE sont perspectivement parallèles et par conséquent $AF = FB$. Le point e représente de même le centre du rectangle $AQPB$, AP et QB ses diagonales, QP le côté parallèle à la ligne de terre ; par conséquent ce parallélisme n'est pas seulement perspectif mais géométrique ».

- Deux droites perspectivement parallèles convergent vers le même point de fuite. Elles sont images de droites parallèles entre elles mais non à la ligne de terre.
- Les droites (CD) et (QP) sont géométriquement parallèles : elles sont images de droites parallèles à la ligne de terre.

Commentaire de Poncelet à propos de la solution de Lambert au problème 3 :

Commentaire de Poncelet à propos de la solution de Lambert au problème 3 :

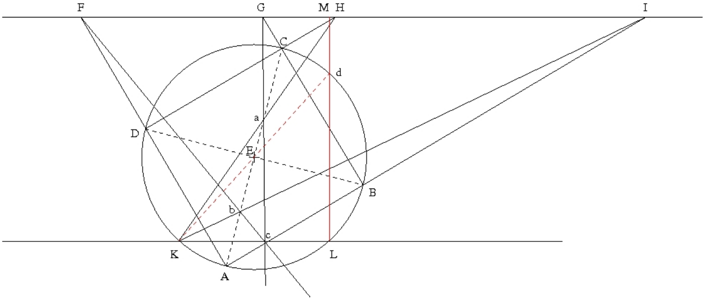
« En effet, d'après la construction, le quadrilatère *abcd* (not. de Lambert) peut être considéré comme la perspective, ou projection, du parallélogramme *ABCD* sur un autre plan, dont *EF* représente la trace avec le plan *ABCD*, et qui aurait été rabattu ensuite sur ce dernier. Or, dans cette projection *QP* (not. de Lambert) représente la droite qui renferme les points de concours des côtés respectivement opposés du parallélogramme ; elle doit donc concourir à l'infini, avec elle, sur la droite *EF*, c'est-à-dire qu'elle doit être parallèle à *EF* ». [in *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, § 198, p. 108]

Commentaire de PONCELET à propos de la solution de LAMBERT au problème 3 :

« En effet, d'après la construction, le quadrilatère *abcd* (not. de LAMBERT) peut être considéré comme la perspective, ou projection, du parallélogramme *ABCD* sur un autre plan, dont *EF* représente la trace avec le plan *ABCD*, et qui aurait été rabattu ensuite sur ce dernier. Or, dans cette projection *QP* (not. de LAMBERT) représente la droite qui renferme les points de concours des côtés respectivement opposés du parallélogramme ; elle doit donc concourir à l'infini, avec elle, sur la droite *EF*, c'est-à-dire qu'elle doit être parallèle à *EF* ». [in *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, § 198, p. 108]

PONCELET proposera une autre solution à ce problème en faisant abstraction du dispositif perspectif.

Exemple. Problème 4 : Un cercle étant donné avec son centre, abaisser une perpendiculaire sur une ligne donnée à l'aide d'une seule règle.



La solution de Lambert est la suivante :

- La ligne donnée tient lieu de ligne de terre.
- Le rectangle $ABCD$ joue le même rôle que le parallélogramme $ABCD$ dans le problème 3.
- Lambert s'appuie sur lui pour construire (Kc) qui tient lieu de ligne d'horizon et qui est donc parallèle à la ligne de terre.
- Les points K, L, d étant sur le cercle et Kd étant un diamètre de ce cercle, KLd est un triangle rectangle.
- La droite (Ld) est perpendiculaire à la ligne de terre.

La solution de LAMBERT est la suivante :

- La ligne donnée tient lieu de ligne de terre.
- Le rectangle $ABCD$ joue le même rôle que le parallélogramme $ABCD$ dans le problème 3.
- LAMBERT s'appuie sur lui pour construire (Kc) qui tient lieu de ligne d'horizon et qui est donc parallèle à la ligne de terre.
- Les points K, L, d étant sur le cercle et Kd étant un diamètre de ce cercle, KLd est un triangle rectangle.
- La droite (Ld) est perpendiculaire à la ligne de terre.

Le dispositif perspectif est sous-jacent à la solution proposée par LAMBERT, comme en attestent les similitudes entre les traitements des problèmes 3 et 4.

Ce problème relève rétrospectivement de la géométrie du cercle et de la règle.

Le même problème se retrouve dans *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises* (1833) de Steiner.

Le même problème se retrouve dans *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises* (1833) de Steiner.

Il s'agit du problème 3 (chapitre III) (p. 52) dans l'ouvrage de Steiner. Celui-ci s'appuie sur les mêmes données que Lambert.

Le même problème se retrouve dans *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises* (1833) de Steiner.

Il s'agit du problème 3 (chapitre III) (p. 52) dans l'ouvrage de Steiner. Celui-ci s'appuie sur les mêmes données que Lambert.

Cette similitude ne doit pas cacher d'importantes différences dans le traitement du problème :

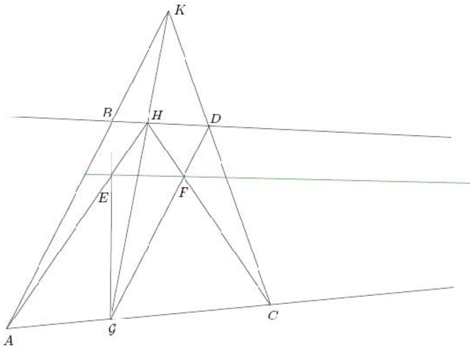
(i) Contrairement à Lambert, Steiner propose deux solutions purement géométriques, sans rapport avec le dispositif de la perpsective.

(ii) Son but est de montrer systématiquement que toute construction à la règle et au compas est possible avec la règle seule et un cercle donné.

(iii) Steiner est plus proche dans ses motivations de Mascheroni que de Lambert

Exemple. Problème 5 : (AC), (BD) sont des lignes qui se coupent en un point en dehors de la table, tracer à l'aide d'une règle seulement et sans prolonger ces lignes, une ligne passant par un point E donné et coupant (BD), (AC) au même point d'intersection.

- On trace les droites (AE) et (BE)
- (BE) coupe (AC) en G
- (AE) coupe (BD) en H
- (AB) et (GH) se coupent en K
- (KC) coupe (BD) en D
- On trace (CH) et (DG)
- Elles se coupent en F qui est le point cherché.



Pour justifier sa solution, LAMBERT s'appuie une nouvelle fois sur la figure dans le plan géométral dont cette construction est l'image en perspective :

Pour justifier sa solution, LAMBERT s'appuie une nouvelle fois sur la figure dans le plan géométral dont cette construction est l'image en perspective :

« $ABHG$, $GHDC$ sont les images de rectangles, dont les côtés convergent vers deux points de l'horizon [K et le point situé en dehors de la table]. E et F sont leurs centres respectifs et, par conséquent, EF est parallèle à BD et à AC, et fuit vers le même point de l'horizon [situé en dehors de la table] ».

Pour justifier sa solution, Lambert s'appuie une nouvelle fois sur la figure dans le plan géométral dont cette construction est l'image en perspective :

« *ABHG*, *GHDC* sont les images de rectangles, dont les côtés convergent vers deux points de l'horizon [*K* et le point situé en dehors de la table]. *E* et *F* sont leurs centres respectifs et, par conséquent, *EF* est parallèle à *BD* et à *AC*, et fuit vers le même point de l'horizon [situé en dehors de la table] ».

Pour justifier géométriquement cette solution, il suffit de se référer au théorème de Desargues et sa réciproque : si deux triangles *ABE* et *CDF* dans le plan sont tels que leurs sommets soient placés deux à deux sur trois droites concourantes en un même point alors, lorsqu'on prolonge leurs côtés, ils se rencontrent en trois points alignés *K*, *G*, *H* et réciproquement.

- Lambert n'évoque à aucun moment ce théorème.

L'analyse des problèmes 1, 3, 4 et 5 permet de justifier la diversité des situations étudiées par LAMBERT en fonction

- des données des problèmes
- des rapports entre la figure dans le plan géométral et son image en perspective.

L'analyse des problèmes 1, 3, 4 et 5 permet de justifier la diversité des situations étudiées par LAMBERT en fonction

- des données des problèmes
- des rapports entre la figure dans le plan géométral et son image en perspective.

LAMBERT justifie la plupart de ses constructions en s'appuyant sur le dispositif de la perspective. Voilà pourquoi il est question de géométrie de la règle perspective.

L'analyse des problèmes 1, 3, 4 et 5 permet de justifier la diversité des situations étudiées par Lambert en fonction

- des données des problèmes
- des rapports entre la figure dans le plan géométral et son image en perspective.

Lambert justifie la plupart de ses constructions en s'appuyant sur le dispositif de la perspective. Voilà pourquoi il est question de géométrie de la règle perspective.

Certains de ces problèmes seront repris par Hachette, Poncelet, Steiner ou encore Hilbert dans des contextes très différents. Il vaut la peine de montrer comment ces protagonistes s'écartent de Lambert alors qu'ils traitent de problèmes identiques.

Troisième partie : réception et fortune des quinze problèmes de Lambert

Nous avons déjà esquissé la réception du traité de LAMBERT parmi les mathématiciens et philosophes de langue allemande à la fin du XVIIIe siècle.

Troisième partie : réception et fortune des quinze problèmes de Lambert

Nous avons déjà esquissé la réception du traité de LAMBERT parmi les mathématiciens et philosophes de langue allemande à la fin du XVIII^{e} siècle.

Notre objectif est double :

(i) étudier la réception du traité et des quinze problèmes parmi les principaux représentants de l'école française de géométrie : HACHETTE, PONCELET ou encore CHASLES,

Troisième partie : réception et fortune des quinze problèmes de Lambert

Nous avons déjà esquissé la réception du traité de LAMBERT parmi les mathématiciens et philosophes de langue allemande à la fin du XVIII^{e} siècle.

Notre objectif est double :

(i) étudier la réception du traité et des quinze problèmes parmi les principaux représentants de l'école française de géométrie : HACHETTE, PONCELET ou encore CHASLES,

(ii) montrer quels usages PONCELET, STEINER, HILBERT ou encore FELDBLUM font de certains problèmes proposés par LAMBERT.

On montrera comment un même problème donne lieu à des traitements très différents.

- Le problème 5 est proposé par POINSOT et résolu par HACHETTE dans la *Correspondance sur l'École polytechnique* dans les années 1804-1808.
- Le théorème X de CARNOT (théorie des transversales) ressemble au problème 5.
- Les problèmes 3 et 5 sont abordés par PONCELET dans son *Traité des propriétés projectives des figures*.
- Les problèmes 4 et 9 sont étudiés par STEINER (1833).

- Le problème 5 est proposé par POINSOT et résolu par HACHETTE dans la *Correspondance sur l'École polytechnique* dans les années 1804-1808.
- Le théorème X de CARNOT (théorie des transversales) ressemble au problème 5.
- Les problèmes 3 et 5 sont abordés par PONCELET dans son *Traité des propriétés projectives des figures*.
- Les problèmes 4 et 9 sont étudiés par STEINER (1833).
- HILBERT s'appuie sur le problème 5 dans son cours de géométrie projective à Königsberg en 1891.
- Dans les *Grundlagen der Geometrie* le problème 4 de construction à la règle et à l'empan admet des similitudes avec le problème 10 de LAMBERT.
- FELDBLUM mentionne les quinze problèmes dans la préface de sa thèse (consacrée aux constructions à la règle et à l'empan).

- Le problème 5 est proposé par Poinsot et résolu par Hachette dans la *Correspondance sur l'École polytechnique* dans les années 1804-1808.
- Le théorème X de Carnot (théorie des transversales) ressemble au problème 5.
- Les problèmes 3 et 5 sont abordés par Poncelet dans son *Traité des propriétés projectives des figures*.
- Les problèmes 4 et 9 sont étudiés par Steiner (1833).
- Hilbert s'appuie sur le problème 5 dans son cours de géométrie projective à Königsberg en 1891.
- Dans les *Grundlagen der Geometrie* le problème 4 de construction à la règle et à l'empan admet des similitudes avec le problème 10 de Lambert.
- Feldblum mentionne les quinze problèmes dans la préface de sa thèse (consacrée aux constructions à la règle et à l'empan).

Ces protagonistes font abstraction du dispositif de la perspective pour traiter ces problèmes.

III.1. Lambert et l'école française de géométrie.

On pourrait croire que l'annexe de Lambert a eu une influence directe sur la géométrie descriptive de Monge et la théorie dite des transversales développée notamment par Carnot et Brianchon.

III.1. Lambert et l'école française de géométrie.

On pourrait croire que l'annexe de LAMBERT a eu une influence directe sur la géométrie descriptive de MONGE et la théorie dite des transversales développée notamment par CARNOT et BRIANCHON.

- La géométrie descriptive de MONGE s'étend à la perspective linéaire. À l'instar de LAMBERT, MONGE accorde une large place à la géométrie pratique.

III.1. Lambert et l'école française de géométrie.

On pourrait croire que l'annexe de Lambert a eu une influence directe sur la géométrie descriptive de Monge et la théorie dite des transversales développée notamment par Carnot et Brianchon.

- La géométrie descriptive de Monge s'étend à la perspective linéaire. À l'instar de Lambert, Monge accorde une large place à la géométrie pratique.
- En 1803, Servois publie les *Solutions peu communes de différents problèmes de géométrie pratique*, inspirées de la *Géométrie de position* de Carnot. Servois emploie l'expression « géométrie de la règle » à plusieurs reprises.

III.1. Lambert et l'école française de géométrie.

On pourrait croire que l'annexe de LAMBERT a eu une influence directe sur la géométrie descriptive de MONGE et la théorie dite des transversales développée notamment par CARNOT et BRIANCHON.

- La géométrie descriptive de MONGE s'étend à la perspective linéaire. À l'instar de LAMBERT, MONGE accorde une large place à la géométrie pratique.
- En 1803, SERVOIS publie les *Solutions peu communes de différents problèmes de géométrie pratique*, inspirées de la *Géométrie de position* de CARNOT. SERVOIS emploie l'expression « géométrie de la règle » à plusieurs reprises.
- En 1804-1808, HACHETTE (disciple de MONGE) propose la solution de LAMBERT au problème 5.

III.1. Lambert et l'école française de géométrie.

On pourrait croire que l'annexe de Lambert a eu une influence directe sur la géométrie descriptive de Monge et la théorie dite des transversales développée notamment par Carnot et Brianchon.

- La géométrie descriptive de Monge s'étend à la perspective linéaire. À l'instar de Lambert, Monge accorde une large place à la géométrie pratique.
- En 1803, Servois publie les *Solutions peu communes de différents problèmes de géométrie pratique*, inspirées de la *Géométrie de position* de Carnot. Servois emploie l'expression « géométrie de la règle » à plusieurs reprises.
- En 1804-1808, Hachette (disciple de Monge) propose la solution de Lambert au problème 5.
- Enfin, le théorème X de Carnot dans son *Essai sur la théorie des transversales* (1806) fait penser au problème 5 de Lambert.

Il ne s'agit là que de ressemblances et d'analogies.

- Monge ne mentionne pas le traité de Lambert et son annexe sur les quinze problèmes.

Il ne s'agit là que de ressemblances et d'analogies.

- Monge ne mentionne pas le traité de Lambert et son annexe sur les quinze problèmes.
- Si Hachette a pris connaissance des quinze problèmes, cela ne signifie pas que Lambert a eu une influence directe sur le développement de la géométrie descriptive. Hachette s'est intéressé à Lambert après coup.

Il ne s'agit là que de ressemblances et d'analogies.

- Monge ne mentionne pas le traité de Lambert et son annexe sur les quinze problèmes.
- Si Hachette a pris connaissance des quinze problèmes, cela ne signifie pas que Lambert a eu une influence directe sur le développement de la géométrie descriptive. Hachette s'est intéressé à Lambert après coup.
- Servois emploie certes l'expression « géométrie de la règle » mais il n'évoque à aucun moment Lambert. Les applications pratiques développées par Servois n'ont rien à voir avec la perspective : elles concernent l'artillerie.

Il ne s'agit là que de ressemblances et d'analogies.

- Monge ne mentionne pas le traité de Lambert et son annexe sur les quinze problèmes.
- Si Hachette a pris connaissance des quinze problèmes, cela ne signifie pas que Lambert a eu une influence directe sur le développement de la géométrie descriptive. Hachette s'est intéressé à Lambert après coup.
- Servois emploie certes l'expression « géométrie de la règle » mais il n'évoque à aucun moment Lambert. Les applications pratiques développées par Servois n'ont rien à voir avec la perspective : elles concernent l'artillerie.
- Les « ressemblances » entre le problème 5 de Lambert et le théorème X de Carnot (1806) ne doivent pas oblitérer des différences incommensurables en termes de motivations, d'écriture et de traitement.

définition de la géométrie descriptive : « La géométrie descriptive a deux objets : le premier, de donner des méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement. Le second objet est de donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent de leur forme et de leurs positions respectives ». [in *Leçons de géométrie descriptive* à l'École Normale de l'an III] définition de la géométrie descriptive : « La géométrie descriptive a deux objets : le premier, de donner des méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement. Le second objet est de donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent de leur forme et de leurs positions respectives ». [in *Leçons de géométrie descriptive* à l'École Normale de l'an III]

MONGE fonde la perspective linéaire et aérienne sur la géométrie descriptive. Il aborde

- la perspective dans la 12^{e} leçon à l'École normale
- la perspective aérienne dans la 8^{e} leçon et la perspective linéaire dans la 9^{e} leçon à l'École centrale des travaux publics.

ANDERSEN souligne certaines ressemblances entre les approches de MONGE et de LAMBERT. Mais rien n'atteste que LAMBERT aurait directement influencé MONGE :

ANDERSEN souligne certaines ressemblances entre les approches de MONGE et de LAMBERT. Mais rien n'atteste que LAMBERT aurait directement influencé MONGE :

« LAMBERT's approach, as previously mentioned, involved looking directly at the geometry in the picture plane. Later in the eighteenth century, Gaspard MONGE created descriptive geometry by applying a similar idea to a plane containing a plan and an elevation, but it is not very likely that MONGE was inspired by LAMBERT ». [p. 635]

ANDERSEN souligne certaines ressemblances entre les approches de MONGE et de LAMBERT. Mais rien n'atteste que LAMBERT aurait directement influencé MONGE :

« LAMBERT's approach, as previously mentioned, involved looking directly at the geometry in the picture plane. Later in the eighteenth century, Gaspard MONGE created descriptive geometry by applying a similar idea to a plane containing a plan and an elevation, but it is not very likely that MONGE was inspired by LAMBERT ». [p. 635]

ANDERSEN refuse de considérer LAMBERT comme un « précurseur » de la géométrie descriptive ou comme un père fondateur d'une approche « synthétique » en géométrie. Cette lecture rétrospective est due à PONCELET et surtout CHASLES, pour des raisons à préciser.

Dans sa thèse sous la direction de HILBERT, FELDBLUM met sur le même plan :

- les quinze problèmes de LAMBERT
- l'ouvrage de SERVOIS de 1803.

Dans sa thèse sous la direction de HILBERT, FELDBLUM met sur le même plan :

- les quinze problèmes de LAMBERT
- l'ouvrage de SERVOIS de 1803.

Motif de ce rapprochement : dans les deux cas, on retrouve l'expression « géométrie de la règle ».

(i) Mais à aucun moment SERVOIS ne mentionne LAMBERT.

(ii) Les *usages* de la géométrie de la règle n'ont rien de commun chez SERVOIS et chez LAMBERT malgré leur intérêt commun pour la géométrie pratique.

Théorème X de CARNOT (*Essai sur la théorie des transversales*, 1806) [« J'appelle transversale une ligne droite ou courbe qui traverse d'une manière quelconque un système d'autres lignes, soit droites, soit courbes ».p. 65.] :

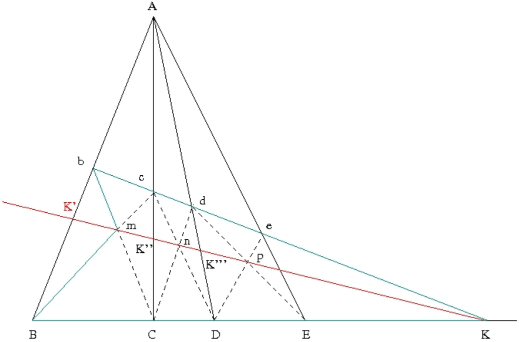
« Si d'un point quelconque A pris hors d'une droite $\overline{BK}$ on mène à cette ligne tant d'autres droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ qu'on voudra, et qu'ayant mené du point K une transervale $\overline{Kb}$, qui coupe toutes ces droites partant du point A en b, c, d, e, on trace les diagonales $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$, $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$, etc. de tous les quadrilatères $BCcb$, $CDdc$, $BDdb$, etc. je dis que tous les points de croisement m, n, p etc., des diagonales de chacun de ces quadrilatères, seront dans une même droite qui passera par le point K ».[p. 81]

Théorème X de CARNOT (*Essai sur la théorie des transversales*, 1806) [« J'appelle transversale une ligne droite ou courbe qui traverse d'une manière quelconque un système d'autres lignes, soit droites, soit courbes ».p. 65.] :

« Si d'un point quelconque A pris hors d'une droite $\overline{BK}$ on mène à cette ligne tant d'autres droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ qu'on voudra, et qu'ayant mené du point K une transervale $\overline{Kb}$, qui coupe toutes ces droites partant du point A en b, c, d, e, on trace les diagonales $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$, $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$, etc. de tous les quadrilatères $BCcb$, $CDdc$, $BDdb$, etc. je dis que tous les points de croisement m, n, p etc., des diagonales de chacun de ces quadrilatères, seront dans une même droite qui passera par le point K ».[p. 81]

Rappel : les points alignés A, B, C, D forment une division harmonique si $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Si C est le milieu de AB, D est rejeté à l'infini.

Figure illustrant la configuration décrite par CARNOT dans le théorème X :



Démonstration de Carnot :

- On considère le quadrilatère complet $KcbmCBK$.
- Les diagonales (Cc) et (Km) coupent la troisième diagonale (Bb) resp. en A et en K'.

Démonstration de Carnot :

- On considère le quadrilatère complet $KcbmCBK$.
- Les diagonales (Cc) et (Km) coupent la troisième diagonale (Bb) resp. en A et en K'.
- En vertu du théorème VI (« Dans tout quadrilatère complet ayant ses trois diagonales, chacune d'elles est coupée par les deux autres en segments proportionnels »), les points A, b, K', B forment une division harmonique.

Démonstration de Carnot :

- On considère le quadrilatère complet $KcbmCBK$.
- Les diagonales (Cc) et (Km) coupent la troisième diagonale (Bb) resp. en A et en K'.
- En vertu du théorème VI (« Dans tout quadrilatère complet ayant ses trois diagonales, chacune d'elles est coupée par les deux autres en segments proportionnels »), les points A, b, K', B forment une division harmonique.
- En vertu du théorème VII (Toute droite coupe un faisceau harmonique en des points formant une division harmonique), les points A, c, K'' C ; A, d, K''', D, etc. forment une division harmonique.

Démonstration de Carnot :

- On considère le quadrilatère complet $KcbmCBK$.
- Les diagonales (Cc) et (Km) coupent la troisième diagonale (Bb) resp. en A et en K'.
- En vertu du théorème VI (« Dans tout quadrilatère complet ayant ses trois diagonales, chacune d'elles est coupée par les deux autres en segments proportionnels »), les points A, b, K', B forment une division harmonique.
- En vertu du théorème VII (Toute droite coupe un faisceau harmonique en des points formant une division harmonique), les points A, c, K'' C ; A, d, K''', D, etc. forment une division harmonique.
- Même raisonnement pour (Kn) et (Kp) qui sont donc confondues avec (Km).

Le rapprochement avec le problème 5 demeure arbitraire :

(i) CARNOT ne se réfère pas à la perspective linéaire,

(ii) son objectif est purement théorique,

(iii) il ne résout pas un problème de construction, il entend démontrer un théorème,

(iv) pour ce faire, il s'appuie sur deux théorèmes précédents (les théorèmes VI et VII) au sein d'un exposé qui fait système,

(v) il développe une THÉORIE des transversales ; il ne cerne pas empiriquement les possibilités liées à l'USAGE de la règle seule.

Le rapprochement avec le problème 5 demeure arbitraire :

(i) CARNOT ne se réfère pas à la perspective linéaire,
(ii) son objectif est purement théorique,
(iii) il ne résout pas un problème de construction, il entend démontrer un théorème,
(iv) pour ce faire, il s'appuie sur deux théorèmes précédents (les théorèmes VI et VII) au sein d'un exposé qui fait système,
(v) il développe une THÉORIE des transversales ; il ne cerne pas empiriquement les possibilités liées à l'USAGE de la règle seule.

Les différences entre LAMBERT et CARNOT sont trop importantes pour prétendre que LAMBERT aurait anticipé sur la théorie des transversales.

III.2. Lambert précurseur d'une géométrie synthétique « générale » ?

Les ressemblances plus ou moins attestées entre l'annexe de Lambert et les travaux de Monge, Servois ou encore Carnot ne signifient pas que le traité de Lambert aurait massivement influencé l'école française de géométrie.

III.2. Lambert précurseur d'une géométrie synthétique « générale » ?

Les ressemblances plus ou moins attestées entre l'annexe de Lambert et les travaux de Monge, Servois ou encore Carnot ne signifient pas que le traité de Lambert aurait massivement influencé l'école française de géométrie.

Il convient de tenir à distance, mais aussi d'expliquer la reconstruction historique opérée par Poncelet et Chasles :

- tous deux considèrent Lambert — dont ils ont étudié les quinze problèmes — comme l'un des pères fondateurs des méthodes synthétiques en géométrie.

III.2. Lambert précurseur d'une géométrie synthétique « générale » ?

Les ressemblances plus ou moins attestées entre l'annexe de LAMBERT et les travaux de MONGE, SERVOIS ou encore CARNOT ne signifient pas que le traité de LAMBERT aurait massivement influencé l'école française de géométrie.

Il convient de tenir à distance, mais aussi d'expliquer la RECONSTRUCTION HISTORIQUE opérée par PONCELET et CHASLES :

- tous deux considèrent LAMBERT — dont ils ont étudié les quinze problèmes — comme l'un des pères fondateurs des méthodes synthétiques en géométrie.

La figure de LAMBERT est ici utilisée pour LÉGITIMER la synthèse à côté de l'analyse.

Dans la préface au *Traité des propriétés projectives des figures*, Poncelet mentionne Lambert à deux reprises :

Dans la préface au *Traité des propriétés projectives des figures*, PONCELET mentionne LAMBERT à deux reprises :

- LAMBERT est cité aux côtés de PASCAL, LAHIRE, CARNOT, SERVOIS, HACHETTE ou encore CHASLES. (p. XXXIV)
- Le traité de LAMBERT constituerait une préfiguration des méthodes *générales* développées par CARNOT, BRIANCHON ou encore PONCELET lui-même. (p. XLIII)

« Enfin on doit encore distinguer le célèbre LAMBERT qui, dans un traité de perspective, publié en 1774, employa le premier, après DESARGUES et PASCAL, les considérations *générales* [nous soulignons] de cette théorie [des projections] pour établir plusieurs propositions élégantes dans le genre de celles de la géométrie de la règle ».

L'expression « considérations générales » n'est pas anodine : la référence à LAMBERT est liée au problème suivant :

- comment faire en sorte que la *géométrie synthétique* s'élève à un niveau de généralité qui serait celui de la la *géométrie analytique* ?

L'expression « considérations générales » n'est pas anodine : la référence à Lambert est liée au problème suivant :

- comment faire en sorte que la *géométrie synthétique* s'élève à un niveau de généralité qui serait celui de la la *géométrie analytique* ?

La géométrie ordinaire ou synthèse se caractérise par :

- la description de figures
- l'étude de grandeurs et de formes existantes
- la déduction de conséquences appréhendables à l'aide de l'intuition sensible
- la restriction aux objets physiques.

Elle semble vouée à n'étudier que des cas particuliers.

L'expression « géométrie analytique » est introduite par Lacroix en 1797 (analogie avec la *mécanique analytique* de Lagrange).

- Elle ne repose pas seulement sur l'usage méthodes algébriques ou analytiques,
- elle procède de l'analyse au sens où ses résultats sont déduits à partir d'un petit nombre de principes.

L'expression « géométrie analytique » est introduite par Lacroix en 1797 (analogie avec la *mécanique analytique* de Lagrange).

- Elle ne repose pas seulement sur l'usage méthodes algébriques ou analytiques,
- elle procède de l'analyse au sens où ses résultats sont déduits à partir d'un petit nombre de principes.

« En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existait une manière d'envisager la géométrie, qu'on pourrait appeler *géométrie analytique*, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa mécanique à l'égard des principes de l'équilibre et du mouvement ». [Lacroix, *Traité de calcul différentiel et intégral*.]

- L'analyse lie des vérités entre elles,
- elle les soumet à des mêmes principes,
- ses méthodes sont uniformes,
- elle est générale.

- L'analyse lie des vérités entre elles,
- elle les soumet à des mêmes principes,
- ses méthodes sont uniformes,
- elle est générale.

PONCELET voit en LAMBERT un précurseur à l'étude des projections qui garantit toute sa GÉNÉRALITÉ à la géométrie synthétique.

- L'analyse lie des vérités entre elles,
- elle les soumet à des mêmes principes,
- ses méthodes sont uniformes,
- elle est générale.

Poncelet voit en Lambert un précurseur à l'étude des projections qui garantit toute sa GÉNÉRALITÉ à la géométrie synthétique.

Une géométrie synthétique générale suppose un raisonnement sur des CONFIGURATIONS et non plus sur des FIGURES isolées.

- Une configuration s'applique à différentes dispositions entre des objets,
- le privilège est accordé aux positions RELATIVES des objets géométriques considérés,
- on doit passer continûment d'une disposition de ces objets à une autre (principe de continuité).

Dans son *Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie* (1837), CHASLES propose la même reconstruction historique :

Dans son *Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie* (1837), Chasles propose la même reconstruction historique :

« Le célèbre Lambert (...) doit être placé au nombre des mathématiciens qui, dans un temps où les prodiges de l'analyse occupaient tous les esprits, ont conservé la connaissance et le goût de la géométrie et ont su en faire les plus savantes applications ».[p. 125]

Dans son *Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie* (1837), CHASLES propose la même reconstruction historique :

« Le célèbre Lambert (...) doit être placé au nombre des mathématiciens qui, dans un temps où les prodiges de l'analyse occupaient tous les esprits, ont conservé la connaissance et le goût de la géométrie et ont su en faire les plus savantes applications ».[p. 125]

CHASLES situe donc rétrospectivement le traité de LAMBERT en fonction de la distinction entre l'analyse et la synthèse.

Dans son *Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie* (1837), CHASLES propose la même reconstruction historique :

« Le célèbre Lambert (...) doit être placé au nombre des mathématiciens qui, dans un temps où les prodiges de l'analyse occupaient tous les esprits, ont conservé la connaissance et le goût de la géométrie et ont su en faire les plus savantes applications ».[p. 125]

CHASLES situe donc rétrospectivement le traité de LAMBERT en fonction de la distinction entre l'analyse et la synthèse.

Il montre qu'il y a des modernités en géométrie. Géométries analytique et synthétique sont d'égale dignité et elles se complètent.

Par les efforts conjoints de LAMBERT, MONGE, BRIANCHON, CARNOT, PONCELET etc., la synthèse s'élève au même niveau de généralité que l'analyse.

Il est vrai qu'en s'appuyant sur le dispositif de la perspective, Lambert raisonne moins sur une figure particulière que sur une configuration.

Il est vrai qu'en s'appuyant sur le dispositif de la perspective, LAMBERT raisonne moins sur une figure particulière que sur une configuration.

- Par exemple, dans le problème 1, on peut faire varier à volonté la position de la ligne d'horizon. Une fois qu'elle est déterminée, le principe de construction demeure le même.

Il est vrai qu'en s'appuyant sur le dispositif de la perspective, LAMBERT raisonne moins sur une figure particulière que sur une configuration.

- Par exemple, dans le problème 1, on peut faire varier à volonté la position de la ligne d'horizon. Une fois qu'elle est déterminée, le principe de construction demeure le même.

(i) Pourtant, LAMBERT est étranger aux discussions qui animent les géomètres français sur la distinction entre analyse et synthèse.

(ii) Réciproquement, PONCELET évoque de manière lointaine le dispositif de la perspective, y compris lorsqu'il reprend à son compte les problèmes de LAMBERT.

ANDERSEN : « some of LAMBERT's ideas pointed towards treating geometry projectively, but once again there are no indications that LAMBERT's work influenced the development that led to projective geometry ».[p. 635]

ANDERSEN : « some of LAMBERT's ideas pointed towards treating geometry projectively, but once again there are no indications that LAMBERT's work influenced the development that led to projective geometry ».[p. 635]

- PONCELET mentionne explicitement les problèmes 5 et 3 de LAMBERT.
- Il souligne que le problème 5 a été proposé dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*.
- Il traite ces deux problèmes « géométriquement » sans se référer à la perspective.
- Il montre enfin que LAMBERT les résout dans ce contexte.

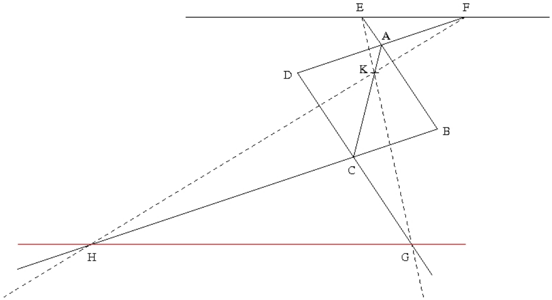
ANDERSEN : « some of LAMBERT's ideas pointed towards treating geometry projectively, but once again there are no indications that LAMBERT's work influenced the development that led to projective geometry ».[p. 635]

- PONCELET mentionne explicitement les problèmes 5 et 3 de LAMBERT.
- Il souligne que le problème 5 a été proposé dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*.
- Il traite ces deux problèmes « géométriquement » sans se référer à la perspective.
- Il montre enfin que LAMBERT les résout dans ce contexte.

Problème 3 : « par un point L, donné à volonté sur le plan d'un parallélogramme $ABCD$, mener, avec la règle, une parallèle à la droite EF située également dans ce plan ».

Solution au problème 3 proposée par Poncelet :

- Les droites (AB) et (AD) coupent la droite donnée resp. en E et F.
- Soit K un point sur la diagonale $[AC]$,
- on trace (EK) et (FK),
- (EK) coupe (DC) en G
- (FK) coupe (BC) en H
- (GH) est la droite recherchée.
- Deux paires de triangles semblables : AEK et CGK ; AFK et CHK
- AEF et CGH sont semblables.



III.3. La géométrie du cercle et de la règle de Steiner.

Au moins deux des quinze problèmes de LAMBERT font intervenir la donnée d'un cercle et de son centre : le problème 4 et le problème 9.

III.3. La géométrie du cercle et de la règle de Steiner.

Au moins deux des quinze problèmes de Lambert font intervenir la donnée d'un cercle et de son centre : le problème 4 et le problème 9.

Steiner (1796-1863) publie en 1833 *Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*.

- Le problème 3 (chap. 3) de Steiner est identique au problème 4 de Lambert : un cercle étant donné avec son centre, abaisser une perpendiculaire sur une ligne donnée à l'aide d'une seule règle.
- Le problème 5a (chap. 3) de Steiner correspond au problème 9 de Lambert : un cercle et son centre étant donnés, partager un arc quelconque en deux parties égales.

III.3. La géométrie du cercle et de la règle de Steiner.

Au moins deux des quinze problèmes de Lambert font intervenir la donnée d'un cercle et de son centre : le problème 4 et le problème 9.

Steiner (1796-1863) publie en 1833 *Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*.

- Le problème 3 (chap. 3) de Steiner est identique au problème 4 de Lambert : un cercle étant donné avec son centre, abaisser une perpendiculaire sur une ligne donnée à l'aide d'une seule règle.
- Le problème 5a (chap. 3) de Steiner correspond au problème 9 de Lambert : un cercle et son centre étant donnés, partager un arc quelconque en deux parties égales.

Pourtant, les sources et les motivations de Steiner ne permettent pas de situer ses travaux dans le prolongement immédiat des quinze problèmes de Lambert.

Dans son ouvrage, STEINER ne mentionne à aucun moment LAMBERT.

- Dans sa préface, il revient en détail sur les résultats obtenus par MASCHERONI avec le compas seul.
- Il cite les travaux des principaux représentants de l'école française de géométrie (PONCELET, BRIANCHON, CARNOT, GERGONNE, etc.)

Dans son ouvrage, Steiner ne mentionne à aucun moment Lambert.

- Dans sa préface, il revient en détail sur les résultats obtenus par Mascheroni avec le compas seul.
- Il cite les travaux des principaux représentants de l'école française de géométrie (Poncelet, Brianchon, Carnot, Gergonne, etc.)

Ses motivations sont analogues à celles de Mascheroni : il s'agit de montrer que toutes les constructions à la règle et au compas peuvent être effectuées en se restreignant à la règle et à la donnée d'un cercle et de son centre.

La géométrie *de la règle et du compas*, la géométrie *du compas seul* et la géométrie *de la règle et du cercle* sont donc équivalentes.

« La géométrie utilise deux instruments pour ses constructions : le compas et la règle. Un mathématicien italien, *Mascheroni*, a montré d'une manière précise que tous les problèmes géométriques pouvaient être résolus à l'aide du compas seul. D'autre part, certains mathématiciens français ont récemment attiré notre attention sur de nombreux problèmes dont la résolution fait seulement appel à la règle, ou au tracé de lignes droites entre des points donnés. Certains ont même émis l'hypothèse que toutes les constructions peuvent être réalisées au moyen de la règle, pourvu qu'un cercle fixé soit donné dans le plan. Le présent ouvrage a pour but de confirmer cette hypothèse ». [Steiner, 1833, introduction.]

Le nom de Lambert n'est pas même invoqué lorsque Steiner mentionne les constructions à la règle seule et donc la géométrie de la règle.

Le nom de LAMBERT n'est pas même invoqué lorsque STEINER mentionne les constructions à la règle seule et donc la GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

L'hypothèse selon laquelle tous problèmes constructibles à la règle et au compas sont constructibles à la règle seule accompagnée d'un cercle donnée et de son centre est due à PONCELET.

Le nom de LAMBERT n'est pas même invoqué lorsque STEINER mentionne les constructions à la règle seule et donc la GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

L'hypothèse selon laquelle tous problèmes constructibles à la règle et au compas sont constructibles à la règle seule accompagnée d'un cercle donnée et de son centre est due à PONCELET.

STEINER laisse de côté les usages pratiques de la règle seule pour s'intéresser exclusivement à la question théorique suivante : la géométrie du cercle et de la règle est-elle « équivalente » à la géométrie de la règle et du compas ?

- Première partie : la théorie des transversales,
- Deuxième partie : le cercle,
- Troisième partie : résolution de tous les problèmes avec la règle et un cercle donné.

III.4. Les constructions à la règle et à l'empan.

III.4. Les constructions à la règle et à l'empan.

Les données de certains problèmes proposés par LAMBERT exigent seulement l'usage

- de l'empan (report du segment unité) (ex. pb. 10)
- ou du bissecteur (ex. pb. 14).

III.4. Les constructions à la règle et à l'empan.

Les données de certains problèmes proposés par Lambert exigent seulement l'usage

- de l'empan (report du segment unité) (ex. pb. 10)
- ou du bissecteur (ex. pb. 14).

Comment Hilbert et Feldblum se situent-ils par rapport à Lambert, lorsqu'ils étudient les constructions à la règle et à l'empan ?

III.4. Les constructions à la règle et à l'empan.

Les données de certains problèmes proposés par LAMBERT exigent seulement l'usage

- de l'empan (report du segment unité) (ex. pb. 10)
- ou du bissecteur (ex. pb. 14).

Comment HILBERT et FELDBLUM se situent-ils par rapport à LAMBERT, lorsqu'ils étudient les constructions à la règle et à l'empan ?

Trois références :

- Les cours de HILBERT sur les fondements de la géométrie,
- Les *Grundlagen der Geometrie* (1899),
- La thèse de FELDBLUM : *Über Elementar-geometrische Constructionen* (1899).

En 1891, Hilbert donne un cours de géométrie projective à l'université de Königsberg. Il distingue préalablement :

- la géométrie de l'intuition, dont les visées sont esthétiques, pédagogiques et pratiques ; elle comprend la géométrie élémentaire, la géométrie projective et l'*analysis situs*.

En 1891, HILBERT donne un cours de géométrie projective à l'université de Königsberg. Il distingue préalablement :

- LA GÉOMÉTRIE DE L'INTUITION, dont les visées sont esthétiques, pédagogiques et pratiques ; elle comprend la géométrie élémentaire, la géométrie projective et l'*analysis situs*.
- LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE, qui relèvent de la théorie de la connaissance (Erkenntnistheorie). Il s'agit
  - (i) d'identifier les axiomes qui fondent une géométrie
  - (ii) d'étudier systématiquement les géométries que l'on peut construire en ajoutant ou en retranchant certains axiomes

En 1891, Hilbert donne un cours de géométrie projective à l'université de Königsberg. Il distingue préalablement :

- la géométrie de l'intuition, dont les visées sont esthétiques, pédagogiques et pratiques ; elle comprend la géométrie élémentaire, la géométrie projective et l'*analysis situs*.
- les axiomes de la géométrie, qui relèvent de la théorie de la connaissance (Erkenntnistheorie). Il s'agit
  - (i) d'identifier les axiomes qui fondent une géométrie
  - (ii) d'étudier systématiquement les géométries que l'on peut construire en ajoutant ou en retranchant certains axiomes
- la géométrie analytique que Hilbert qualifie de « wissenschaftlich mathematisch ».

En 1891, Hilbert donne un cours de géométrie projective à l'université de Königsberg. Il distingue préalablement :

- la géométrie de l'intuition, dont les visées sont esthétiques, pédagogiques et pratiques ; elle comprend la géométrie élémentaire, la géométrie projective et l'*analysis situs*.
- les axiomes de la géométrie, qui relèvent de la théorie de la connaissance (Erkenntnistheorie). Il s'agit
  (i) d'identifier les axiomes qui fondent une géométrie
  (ii) d'étudier systématiquement les géométries que l'on peut construire en ajoutant ou en retranchant certains axiomes
- la géométrie analytique que Hilbert qualifie de « wissenschaftlich mathematisch ».

Hilbert souscrit alors à la conception gaussienne de la géométrie : en tant que théorie de l'espace, elle n'est pas un pur produit de l'esprit. Elle est comparable à la mécanique.

Dans ce cours, HILBERT démontre le théorème de DESARGUES après avoir introduit les principaux concepts de la géométrie projective.

Dans ce cours, HILBERT démontre le théorème de DESARGUES après avoir introduit les principaux concepts de la géométrie projective.

Pour familiariser ses étudiants avec ce théorème, HILBERT propose le problème suivant : « étant donné deux droites a et b et un point A situé entre a et b, tracer une droite passant par A et par le point d'intersection supposé inatteignable de a et b ».

Dans ce cours, HILBERT démontre le théorème de DESARGUES après avoir introduit les principaux concepts de la géométrie projective.

Pour familiariser ses étudiants avec ce théorème, HILBERT propose le problème suivant : « étant donné deux droites *a* et *b* et un point *A* situé entre *a* et *b*, tracer une droite passant par *A* et par le point d'intersection supposé inatteignable de *a* et *b* ».

Il s'agit exactement du problème 5 de LAMBERT. HILBERT utilise la même construction qu'il justifie THÉORIQUEMENT à l'aide du théorème de DESARGUES.

- Il fait abstraction du dispositif de la perspective et des usages pratiques de ce problème.

Dans sa thèse, FELDBLUM se réfère tout d'abord aux quinze problèmes de LAMBERT :

Dans sa thèse, FELDBLUM se réfère tout d'abord aux quinze problèmes de LAMBERT :

« Une construction relativement simple en théorie peut toutefois devenir coûteuse voire irréalisable lorsqu'elle est utilisée en pratique. (...) LAMBERT fut le premier à attirer notre attention sur la simplicité pratique (praktische Einfachheit) des constructions géométriques ».

Dans sa thèse, Feldblum se réfère tout d'abord aux quinze problèmes de Lambert :

« Une construction relativement simple en théorie peut toutefois devenir coûteuse voire irréalisable lorsqu'elle est utilisée en pratique. (...) Lambert fut le premier à attirer notre attention sur la simplicité pratique (praktische Einfachheit) des constructions géométriques ».

Feldblum distingue simplicité pratique et simplicité théorique et il montre que Lambert privilégie la première dans ses quinze problèmes.

Feldblum mentionne également les *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* (1765) dans lesquelles Lambert repère deux usages distincts du compas :

- le compas traçant,
- le compas comme transporteur de distances.

Bien qu'il reconnaisse la spécificité du projet de LAMBERT, FELDBLUM est motivé par des problèmes théoriques au même titre que HILBERT.

Bien qu'il reconnaisse la spécificité du projet de LAMBERT, FELDBLUM est motivé par des problèmes théoriques au même titre que HILBERT.

(i) Quels sont les axiomes sur lesquels les constructions à la règle et à l'empan sont fondées ?
(ii) Quels sont les critères ANALYTIQUES qui commandent la POSSIBILITÉ de telles constructions ?
(iii) Quels sont les problèmes constructibles (ou non) à la règle et à l'empan ?

Bien qu'il reconnaisse la spécificité du projet de LAMBERT, FELDBLUM est motivé par des problèmes théoriques au même titre que HILBERT.

(i) Quels sont les axiomes sur lesquels les constructions à la règle et à l'empan sont fondées ?

(ii) Quels sont les critères ANALYTIQUES qui commandent la POSSIBILITÉ de telles constructions ?

(iii) Quels sont les problèmes constructibles (ou non) à la règle et à l'empan ?

FELDBLUM et HILBERT dessinent les contours d'une géométrie plus faible que la géométrie de la règle et du compas mais plus forte que la géométrie de la règle seule.

Bien qu'il reconnaisse la spécificité du projet de LAMBERT, FELDBLUM est motivé par des problèmes théoriques au même titre que HILBERT.

(i) Quels sont les axiomes sur lesquels les constructions à la règle et à l'empan sont fondées ?

(ii) Quels sont les critères ANALYTIQUES qui commandent la POSSIBILITÉ de telles constructions ?

(iii) Quels sont les problèmes constructibles (ou non) à la règle et à l'empan ?

FELDBLUM et HILBERT dessinent les contours d'une géométrie plus faible que la géométrie de la règle et du compas mais plus forte que la géométrie de la règle seule.

FELDBLUM établit l'équivalence entre

- la règle et l'empan,
- la règle et le bissecteur.

HILBERT et FELDBLUM posent des questions de constructibilité du même ordre que dans le cas de la règle et du compas.

HILBERT et FELDBLUM posent des questions de constructibilité du même ordre que dans le cas de la règle et du compas.

Ouvrage de référence sur les constructions à la règle et au compas : F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (1895) (Asso. pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturels, trad. en français en 1896.)

HILBERT et FELDBLUM posent des questions de constructibilité du même ordre que dans le cas de la règle et du compas.

Ouvrage de référence sur les constructions à la règle et au compas : F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (1895) (Asso. pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturels, trad. en français en 1896.)

Problème fondamental : « Quels problèmes peut-on ou ne peut-on pas construire géométriquement ? ». Pour KLEIN cette question est purement théorique et elle est sans rapport immédiat avec des pratiques effectives de construction.

HILBERT et FELDBLUM posent des questions de constructibilité du même ordre que dans le cas de la règle et du compas.

Ouvrage de référence sur les constructions à la règle et au compas : F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (1895) (Asso. pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturels, trad. en français en 1896.)

Problème fondamental : « Quels problèmes peut-on ou ne peut-on pas construire géométriquement ? ». Pour KLEIN cette question est purement théorique et elle est sans rapport immédiat avec des pratiques effectives de construction.

KLEIN mentionne le compas seul, la règle seule, la règle et le compas accompagnés d'autres instruments. Il se retreint à la règle et au compas.

KLEIN insiste sur le fait que la géométrie élémentaire ne suffit pas pour résoudre ces problèmes de POSSIBILITÉ. Il faut s'appuyer sur l'ALGÈBRE et l'ANALYSE.

KLEIN insiste sur le fait que la géométrie élémentaire ne suffit pas pour résoudre ces problèmes de POSSIBILITÉ. Il faut s'appuyer sur l'ALGÈBRE et l'ANALYSE.

« Il est singulier que la géométrie élémentaire ne suffise pas pour répondre à la question posée. Le secours de l'algèbre et de l'analyse devient nécessaire, et il faut par suite nous demander comment s'exprime dans leur langue l'emploi de la règle et du compas pour les constructions ».

KLEIN insiste sur le fait que la géométrie élémentaire ne suffit pas pour résoudre ces problèmes de POSSIBILITÉ. Il faut s'appuyer sur l'ALGÈBRE et l'ANALYSE.

« Il est singulier que la géométrie élémentaire ne suffise pas pour répondre à la question posée. Le secours de l'algèbre et de l'analyse devient nécessaire, et il faut par suite nous demander comment s'exprime dans leur langue l'emploi de la règle et du compas pour les constructions ».

KLEIN évoque les résultats fondamentaux de GAUSS (1796,1801) et WANTZEL (1837) pour les polygones réguliers :

KLEIN insiste sur le fait que la géométrie élémentaire ne suffit pas pour résoudre ces problèmes de POSSIBILITÉ. Il faut s'appuyer sur l'ALGÈBRE et l'ANALYSE.

« Il est singulier que la géométrie élémentaire ne suffise pas pour répondre à la question posée. Le secours de l'algèbre et de l'analyse devient nécessaire, et il faut par suite nous demander comment s'exprime dans leur langue l'emploi de la règle et du compas pour les constructions ».

KLEIN évoque les résultats fondamentaux de GAUSS (1796,1801) et WANTZEL (1837) pour les polygones réguliers :

un polygone régulier est constructible si le nombre de ces côtés n est de la forme 2^α, avec $\alpha \geq 2$, ou de la forme $2^\alpha p_1 p_2 ... p_r$, les p_i étant des nombres premiers de Fermat, i.e. de la forme $p_i = 2^{2^{\mu_i}} + 1$.

KLEIN mentionne également le critère nécessaire de constructibilité énoncé par WANTZEL en 1837 :

KLEIN mentionne également le critère nécessaire de constructibilité énoncé par WANTZEL en 1837 :

Tout nombre constructible est algébrique (sur $\mathbb{Q}$) et son degré est une puissance de 2, i.e. le degré de son polynôme minimal est de degré une puissance de 2.

Klein mentionne également le critère nécessaire de constructibilité énoncé par Wantzel en 1837 :

Tout nombre constructible est algébrique (sur $\mathbb{Q}$) et son degré est une puissance de 2, i.e. le degré de son polynôme minimal est de degré une puissance de 2.

Ce critère permet de montrer que certains problèmes sont non constructibles (à la règle et au compas) :

KLEIN mentionne également le critère nécessaire de constructibilité énoncé par WANTZEL en 1837 :

Tout nombre constructible est algébrique (sur $\mathbb{Q}$) et son degré est une puissance de 2, i.e. le degré de son polynôme minimal est de degré une puissance de 2.

Ce critère permet de montrer que certains problèmes sont non constructibles (à la règle et au compas) :

« tout problème qui conduit à une équation irréductible dont le degré n'est pas une puissance de 2, ne peut être résolu avec la ligne droite et le cercle. Ainsi *la duplication du cube*, qui dépend de l'équation $x^3 - 2a^3 = 0$ toujours irréductible, ne peut être obtenue par la géométrie élémentaire ». [WANTZEL, 1837.]

L'ALGÈBRE comme théorie des équations permet de trancher sur l'impossibilité de certaines constructions.

Si on utilise le langage de la théorie des corps, un nombre est constructible si et seulement s'il existe un entier $p \geq 1$ et une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$, L_1, L_2, ..., L_p, tels que :

- $L_1 = \mathbb{Q}$,
- pour $1 \neq j \neq p-1$, $L_j \subset L_{j+1}$ et $[L_{j+1} : L_j] = 2$,
- $t \in L_p$.

Si on utilise le langage de la théorie des corps, un nombre est constructible si et seulement s'il existe un entier $p \geq 1$ et une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$, L_1, L_2, ..., L_p, tels que :

- $L_1 = \mathbb{Q}$,
- pour $1 \neq j \neq p-1$, $L_j \subset L_{j+1}$ et $[L_{j+1} : L_j] = 2$,
- $t \in L_p$.

En particulier, le corps C des nombres constructibles à la règle et au compas est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée, i.e. pour tout $a \in C$ tel que $a \geq 0$, $\sqrt{a} \in C$.

Le corps C est même le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Si on utilise le langage de la théorie des corps, un nombre est constructible si et seulement s'il existe un entier $p \geq 1$ et une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$, L_1, L_2, ..., L_p, tels que :

- $L_1 = \mathbb{Q}$,
- pour $1 \neq j \neq p-1$, $L_j \subset L_{j+1}$ et $[L_{j+1} : L_j] = 2$,
- $t \in L_p$.

En particulier, le corps C des nombres constructibles à la règle et au compas est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée, i.e. pour tout $a \in C$ tel que $a \geq 0$, $\sqrt{a} \in C$.

Le corps C est même le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Nous avons obtenu une caractérisation analytique de la constructibilité à la règle et au compas.

HILBERT repère d'abord les axiomes auxquels ces constructions sont assujetties. Il s'agit des axiomes d'INCIDENCE, d'ORDRE, de CONGRUENCE et des PARALLÈLES,

HILBERT repère d'abord les axiomes auxquels ces constructions sont assujetties. Il s'agit des axiomes d'INCIDENCE, d'ORDRE, de CONGRUENCE et des PARALLÈLES,

mais non des axiomes de continuité (par ex. l'axiome d'Archimède = « si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B ».)

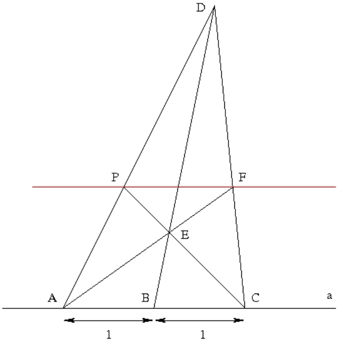
Hilbert repère d'abord les axiomes auxquels ces constructions sont assujetties. Il s'agit des axiomes d'incidence, d'ordre, de congruence et des parallèles,

mais non des axiomes de continuité (par ex. l'axiome d'Archimède = « si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B ».)

Hilbert classe les pb. de construction en fonction de ces axiomes :

- problème 1. Mener la droite passant par deux points et déterminer l'intersection de deux droites non parallèles (axiomes I, II, IV).
- problème 2. Reporter un segment donné sur une droite donnée (axiomes III).

Le problème 1 suppose la règle seule. Les autres problèmes la règle et l'empan. Exemple, le problème 4 : « par un point, mener la parallèle à une droite donnée ».



Solution de HILBERT : « joignons le point P à un point quelconque A de la droite donnée a et, sur a, à partir de A portons l'empan deux fois, en B et C. Soit D un point quelconque de AP, distinct de A et de P et pour lequel BD n'est pas parallèle à PC. Les droites CP et BD se coupent en E ; appelons F l'intersection de AE et CD. (...) PF est la parallèle demandée ».

Solution de HILBERT : « joignons le point P à un point quelconque A de la droite donnée a et, sur a, à partir de A portons l'empan deux fois, en B et C. Soit D un point quelconque de AP, distinct de A et de P et pour lequel BD n'est pas parallèle à PC. Les droites CP et BD se coupent en E ; appelons F l'intersection de AE et CD. (...) PF est la parallèle demandée ».

Le problème 4 se résout donc à la règle *et* à l'empan. HILBERT distingue dans la solution du problème les possibilités offertes par chaque instrument.

Solution de HILBERT : « joignons le point P à un point quelconque A de la droite donnée a et, sur a, à partir de A portons l'empan deux fois, en B et C. Soit D un point quelconque de AP, distinct de A et de P et pour lequel BD n'est pas parallèle à PC. Les droites CP et BD se coupent en E ; appelons F l'intersection de AE et CD. (...) PF est la parallèle demandée ».

Le problème 4 se résout donc à la règle *et* à l'empan. HILBERT distingue dans la solution du problème les possibilités offertes par chaque instrument.

La méthode axiomatique est au fondement de ces constructions et elle guide HILBERT dans l'usage de la règle et de l'empan, i.e. dans l'investigation des possibilités théoriques offertes par ces deux instruments.

Contrairement à Lambert, Hilbert et Feldblum laissent de côté les usages pratiques de la règle et de l'empan. Ils les envisagent théoriquement à deux niveaux :

Contrairement à Lambert, Hilbert et Feldblum laissent de côté les usages pratiques de la règle et de l'empan. Ils les envisagent théoriquement à deux niveaux :

(i) il s'agit de remonter aux principes ou axiomes qui commandent ces constructions. La méthode axiomatique est un préalable à de tels problèmes.
   - Elle constitue non seulement un fondement, mais aussi un instrument de découverte, de contrôle et de classification des problèmes abordés.

Contrairement à Lambert, Hilbert et Feldblum laissent de côté les usages pratiques de la règle et de l'empan. Ils les envisagent théoriquement à deux niveaux :

(i) il s'agit de remonter aux principes ou axiomes qui commandent ces constructions. La méthode axiomatique est un préalable à de tels problèmes.
   - Elle constitue non seulement un fondement, mais aussi un instrument de découverte, de contrôle et de classification des problèmes abordés.

(ii) il convient de déterminer un critère analytique de constructibilité à la règle et à l'empan, à l'image des critères de Gauss et Wantzel dans le cas des constructions à la règle et au compas.

- Le tracé des droites est associé aux quatre opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division,
- le report des segments est associé à l'extraction de la racine carré de la somme de deux carrés.

- Le tracé des droites est associé aux quatre opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division,
- le report des segments est associé à l'extraction de la racine carré de la somme de deux carrés.

Donc un problème est constructible à la règle et à l'empan si et seulement si les coordonnées des points à construire sont des fonctions dont la détermination fait appel aux opérations $+$, $-$, $\times$, :, $\sqrt{a^2+b^2}$ un nombre fini de fois.

- Le tracé des droites est associé aux quatre opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division,
- le report des segments est associé à l'extraction de la racine carré de la somme de deux carrés.

Donc un problème est constructible à la règle et à l'empan si et seulement si les coordonnées des points à construire sont des fonctions dont la détermination fait appel aux opérations $+$, $-$, $\times$, :, $\sqrt{a^2+b^2}$ un nombre fini de fois.

HILBERT en déduit que « tous les problèmes solubles à la règle et au compas ne sont pas justiciables de la règle et de l'empan ». La géométrie de la règle et de l'empan est donc

- plus forte que la géométrie de la règle,
- mais moins forte que la géométrie de la règle et du compas.

Feldblum : « une construction résoluble à l'aide de la règle et du compas est insoluble au moyen de la règle et de l'empan si, dans la solution au problème, on ne peut pas éviter la construction de l'expression de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$ ou de la forme équivalente $\sqrt{xy}$, où x et y sont des segments donnés ou construits ».

FELDBLUM : « une construction résoluble à l'aide de la règle et du compas est insoluble au moyen de la règle et de l'empan si, dans la solution au problème, on ne peut pas éviter la construction de l'expression de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$ ou de la forme équivalente $\sqrt{xy}$, où x et y sont des segments donnés ou construits ».

La référence à LAMBERT ne doit pas tromper : à l'instar de HILBERT, FELDBLUM recherche un critère analytique pour les constructions à la règle et à l'empan.

- Ce critère permet de classer à nouveaux frais les problèmes de construction.

FELDBLUM : « une construction résoluble à l'aide de la règle et du compas est insoluble au moyen de la règle et de l'empan si, dans la solution au problème, on ne peut pas éviter la construction de l'expression de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$ ou de la forme équivalente $\sqrt{xy}$, où x et y sont des segments donnés ou construits ».

La référence à LAMBERT ne doit pas tromper : à l'instar de HILBERT, FELDBLUM recherche un critère analytique pour les constructions à la règle et à l'empan.

- Ce critère permet de classer à nouveaux frais les problèmes de construction.

- Le problème de MALFATTI (dans un triangle ABC, tracer trois cercles inscrits dans les angles A, B, C du triangle et tels que chacun de ces cercles soit tangent aux deux autres) est justiciable de la règle et de l'empan.
- Le problème d'APOLLONIUS (trouver un cercle tangent à trois cercles de diamètres différents) n'est pas justiciable de la règle et de l'empan.

Alors que LAMBERT parcourt les problèmes constructibles à la règle seule, à la règle et à l'empan, à la règle et au bissecteur, à la règle et au cercle en faisant varier empiriquement les données du problème, STEINER, HILBERT et FELDBLUM classent SYSTÉMATIQUEMENT ces problèmes :

Alors que Lambert parcourt les problèmes constructibles à la règle seule, à la règle et à l'empan, à la règle et au bissecteur, à la règle et au cercle en faisant varier empiriquement les données du problème, Steiner, Hilbert et Feldblum classent systématiquement ces problèmes :

- Selon Steiner, la géométrie de la règle et du cercle est équivalente à la géométrie de la règle et du compas,
- Selon Feldblum et Hilbert, certains problèmes, constructibles à la règle et au compas, sont constructibles à la règle et à l'empan.

Alors que LAMBERT parcourt les problèmes constructibles à la règle seule, à la règle et à l'empan, à la règle et au bissecteur, à la règle et au cercle en faisant varier empiriquement les données du problème, STEINER, HILBERT et FELDBLUM classent SYSTÉMATIQUEMENT ces problèmes :

- Selon STEINER, la géométrie de la règle et du cercle est équivalente à la géométrie de la règle et du compas,
- Selon FELDBLUM et HILBERT, certains problèmes, constructibles à la règle et au compas, sont constructibles à la règle et à l'empan.

Pour obenir son résultat, STEINER prolonge la géométrie synthétique de CARNOT, BRIANCHON et PONCELET. En revanche, HILBERT et FELDBLUM entendent travailler analytiquement. Ils dégagent ainsi la spécificité de la géométrie à la règle et à l'empan.

Sous des modalités différentes, Steiner d'une part, Hilbert et Feldblum d'autre part, fondent en théorie le projet lambertien de réduire au minimum l'usage du compas à côté de la règle ou de remplacer le compas par un instrument plus faible :

Sous des modalités différentes, STEINER d'une part, HILBERT et FELDBLUM d'autre part, fondent en théorie le projet lambertien de réduire au minimum l'usage du compas à côté de la règle ou de remplacer le compas par un instrument plus faible :

- STEINER montre qu'il faut et qu'il suffit de se donner un cercle en plus des tracés à la règle pour construire tous les problèmes à la règle et au compas.
- FELDBLUM et HILBERT montrent que pour certains problèmes, l'empan peut se substituer au compas.

Sous des modalités différentes, Steiner d'une part, Hilbert et Feldblum d'autre part, fondent en théorie le projet lambertien de réduire au minimum l'usage du compas à côté de la règle ou de remplacer le compas par un instrument plus faible :

- Steiner montre qu'il faut et qu'il suffit de se donner un cercle en plus des tracés à la règle pour construire tous les problèmes à la règle et au compas.
- Feldblum et Hilbert montrent que pour certains problèmes, l'empan peut se substituer au compas.

Seulement, Hilbert étudie les constructions à la règle et à l'empan en rapport avec « le dix-septième problème » : une forme de *n* variables de degré quelconque à coefficients réels et toujours positive ou nulle pour les valeurs réelles des variables peut-elle être représentée comme somme de carrés de formes réelles ?

Les questions de possibilité rejetées en périphérie par LAMBERT, sont centrales chez STEINER et HILBERT / FELDBLUM.

Les questions de possibilité rejetées en périphérie par LAMBERT, sont centrales chez STEINER et HILBERT / FELDBLUM.

- STEINER les résout de proche en proche par voie synthétique (il prolonge notamment la théorie des transversales de CARNOT et BRIANCHON).
- HILBERT et FELDBLUM les résolvent par voie analytique (connaissant le critère analytique de constructibilité à la règle et au compas, quel est le critère de constructibilité à la règle et à l'empan ?)

Les questions de possibilité rejetées en périphérie par LAMBERT, sont centrales chez STEINER et HILBERT / FELDBLUM.

- STEINER les résout de proche en proche par voie synthétique (il prolonge notamment la théorie des transversales de CARNOT et BRIANCHON).
- HILBERT et FELDBLUM les résolvent par voie analytique (connaissant le critère analytique de constructibilité à la règle et au compas, quel est le critère de constructibilité à la règle et à l'empan ?)

STEINER se situe dans le prolongement de MASCHERONI. Mais, alors que MASCHERONI n'utilisait que le compas, STEINER réduit l'usage de cet instrument au minimum.

Les questions de possibilité rejetées en périphérie par Lambert, sont centrales chez Steiner et Hilbert / Feldblum.

- Steiner les résout de proche en proche par voie synthétique (il prolonge notamment la théorie des transversales de Carnot et Brianchon).
- Hilbert et Feldblum les résolvent par voie analytique (connaissant le critère analytique de constructibilité à la règle et au compas, quel est le critère de constructibilité à la règle et à l'empan ?)

Steiner se situe dans le prolongement de Mascheroni. Mais, alors que Mascheroni n'utilisait que le compas, Steiner réduit l'usage de cet instrument au minimum.

Malgré la référence à Lambert, la démarche de Feldblum est comparable à celle de Wantzel.

HILBERT, conclusion aux *Grundlagen* : « Notre ouvrage est une étude critique des principes de la géométrie ; l'idée directrice a été de rechercher si la réponse à une question donnée est possible, certains moyens étant imposés à l'avance. Cette idée paraît contenir une règle générale et naturelle ; lors de l'étude d'un problème mathématique ou d'un théorème, notre sens de la connaissance est satisfait dans les cas suivants ; nous avons trouvé la solution complète du problème ou une démonstration rigoureuse du théorème ; si nous échouons, la raison de la nécessité de l'échec ou de l'impossibilité de la réussite est bien mise en évidence. Ainsi, dans les mathématiques modernes, les questions posées par l'impossibilité de certaines solutions ou l'insolubilité de quelques problèmes jouent un rôle de premier plan ; le désir de répondre à une telle question a souvent été l'occasion de découvertes importantes ».