

Exercice A8

Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x e^{-x} \quad ; \quad g(x) = f(x) + [f(x)]^2$$

Partie A - Étude de la fonction f

1° a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f' .

Étudier le sens de variation de f .

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.

c) Donner le tableau de variation de f .

(On ne demande pas de construire la représentation graphique de f).

2° a) Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution, notée α .

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

b) Montrer de même que l'équation $f(x) = -1$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution, notée β .

Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} .

Partie B - Étude de la fonction g

1°) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $g'(x) = f'(x) [1 + 2f(x)]$.

Étudier le sens de variation de g .

2°) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et sa limite en $-\infty$.

3°) Donner le tableau de variation de g . On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.

4° a) Établir que, pour tout réel x , on a : $g(x) - x = x e^{-x} [1 + x e^{-x} - e^x]$

b) Montrer que, pour tout x réel, on a : $1 + x e^{-x} \leq 1 + x \leq e^x$

c) Préciser la position de la courbe représentative Γ de la fonction g par rapport à sa tangente T en O .

5°) Tracer Γ (on prendra pour unité graphique 2 cm). Préciser les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur le dessin la tangente T .