

Exercice A6

On considère dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0).

1°) Par tout point H du segment $[AA']$ distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'.

On pose $\overline{OH} = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.

2°) Soit f la fonction numérique définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$ et soit ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

a) Étudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.

En déduire les tangentes à la courbe ($\mathcal{C}$) aux points d'abscisses 1 et -1.

b) Montrer que f est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et calculer $f'(x)$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

d) Calculer $f(0)$ et tracer la courbe ($\mathcal{C}$).

3°) Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.