

Propriété

Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une et une seule similitude directe f transformant A en A' et B en B' .

Démonstration

On sait qu'une similitude directe a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$

Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Notons $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$ leurs affixes respectives.

Rechercher une similitude directe transformant A en A' et B en B' revient à rechercher deux nombres complexes a et b , $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ tels que $z_{A'} = az_A + b$ et $z_{B'} = az_B + b$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} - z_{A'} = az_B + b - az_A - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - az_A \\ a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = z_{A'} - \left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \right) z_A \\ a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \end{cases} \end{aligned}$$

On a supposé $A \neq B$ et $A' \neq B'$,

donc on a trouvé un et un seul couple $(a; b)$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ tel que $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$

Il existe donc une et une seule similitude directe transformant A en A' et B en B' .