

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

C'est-à-dire que, au voisinage de l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur x .

Démonstration

- Justifions que $e^x \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour cela considérons la fonction h définie par : $h(x) = e^x - x$.

h est la somme de deux fonction dérivables; donc h est dérivable et $h'(x) = e^x - 1$.

On sait que si $x \leq 0$, on a $e^x \leq 1$ et si $x \geq 0$ $e^x \geq 1$.

On en déduit que $h'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0]$ et $h'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Donc h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et h est croissante sur $[0; +\infty[$.

On remarque que $h(0) = e^0 - 0 = 1$. En utilisant le sens de variation de h , on peut alors conclure :

Si $x \in]-\infty; 0]$, on a $x \leq 0$ donc $h(x) \geq h(0) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 0$ c'est-à-dire $e^x \geq x$.

Si $x \in [0; +\infty[$, on a $x \geq 0$ donc $h(x) \geq h(0) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 0$ c'est-à-dire $e^x \geq x$.

On a donc démontré que pour tout réel x , $e^x \geq x$.

- En appliquant la relation précédente à $\frac{x}{2}$, on obtient $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$.

En élevant au carré (les deux membres sont positifs), on obtient $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \frac{x^2}{4}$.

c'est-à-dire $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$ donc $e^x \geq \frac{x^2}{4}$. On en déduit, pour $x > 0$ $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on peut en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x e^x} = +\infty$.

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^x = 0^+$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.