

## Propriété

Il existe une unique fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .  
Cette fonction est appelée fonction exponentielle.  
(On suppose connues la fonction logarithme népérien, sa dérivée et ses variations)

### Démonstration

#### Existence d'une fonction vérifiant les conditions

La fonction logarithme népérien a pour tableau de variations :

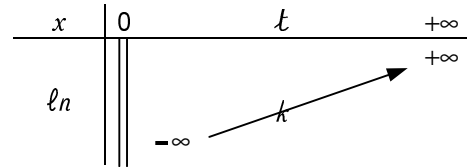
On en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ,

il existe un unique  $t \in ]0; +\infty[$  tel que  $\ln(t) = k$ .

Ce réel strictement positif  $t$  est noté :  $t = \exp(k)$ .

On peut donc considérer la fonction  $\exp$ , qui à tout réel  $x$  associe l'unique réel strictement positif  $\exp(x)$  tel que  $\ln[\exp(x)] = x$ , et que l'on appelle fonction exponentielle.

On sait que  $\ln 1 = 0$  donc  $\exp(0) = 1$ .



#### Dérivée de la fonction exponentielle

Par définition de la fonction exponentielle on a :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \exp(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in ]0; +\infty[ \\ \ln y = x \end{cases}$$

Soit  $(\mathcal{E})$  la courbe de la fonction exponentielle et  $(\Gamma)$  la courbe de la fonction logarithme népérien, dans un repère orthonormal.

$M(x; y) \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow M'(y; x) \in (\Gamma)$ .

Les points  $M(x; y)$  et  $M'(y; x)$  étant symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ , on en déduit que la courbe  $(\mathcal{E})$  est la symétrique, par rapport à la droite d'équation  $y = x$ , de la courbe  $(\Gamma)$ .

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, donc la courbe  $(\Gamma)$  a en chacun de ses points une tangente non horizontale.

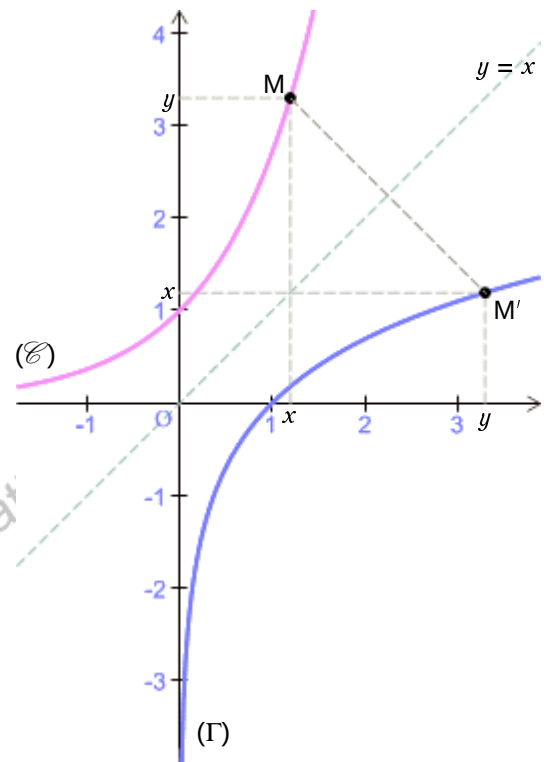
Par symétrie on en déduit que la courbe  $(\mathcal{E})$  a en chacun de ses points une tangente non verticale, donc que la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

D'après la formule de dérivation des fonction composées, on sait que si  $u$  est une fonction strictement positive et dérivable,  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$$\text{On a donc } [\ln(\exp(x))]' = \frac{[\exp(x)]'}{\exp(x)}$$

Mais par définition de la fonction exponentielle on sait que  $\ln(\exp(x)) = x$  donc  $[\ln(\exp(x))]' = 1$

On a donc, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{[\exp(x)]'}{\exp(x)} = 1$  c'est-à-dire  $[\exp(x)]' = \exp(x)$



On a donc justifié l'existence d'une fonction  $\exp$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\exp' = \exp$  et  $\exp(0) = 1$ .

#### Unicité d'une telle fonction

Supposons que  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .

Par définition de la fonction exponentielle, on sait que  $\exp(x) > 0$  donc  $\exp(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Posons  $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$   $h$  est le quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp'(x)}{[\exp(x)]^2} = \frac{f(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp(x)}{[\exp(x)]^2} = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$h$  est donc une fonction constante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{D'autre part on a : } h(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc pour tout réel  $x$  on a  $h(x) = 1$ , c'est-à-dire  $\frac{f(x)}{\exp(x)} = 1$  c'est-à-dire  $f(x) = \exp(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On en déduit alors l'unicité de la fonction.