

Exercice F3

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. (a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

$$123u + 2003v = 1 .$$

- (b) En déduire un entier relatif k_0 tel que :

$$123k_0 \equiv 1 \pmod{2003} .$$

- (c) Montrer que, pour tout entier relatif x ,

$$123x \equiv 456 \pmod{2003} \quad \text{si et seulement si} \quad x \equiv 456k_0 \pmod{2003} .$$

- (d) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :

$$123x \equiv 456 \pmod{2003} .$$

- (e) Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$$1 \leq n \leq 2002 \quad \text{et} \quad 123n \equiv 456 \pmod{2003} .$$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

- (a) Déterminer :

$$\text{PGCD}(a, 2003) .$$

En déduire qu'il existe un entier m tel que :

$$am \equiv 1 \pmod{2003} .$$

- (b) Montrer que, pour tout entier b , il existe un unique entier x tel que :

$$0 \leq x \leq 2002 \quad \text{et} \quad ax \equiv b \pmod{2003} .$$