

Plus petit commun multiple : PPCM

Exemple 1

Pour effectuer le calcul $\frac{65}{18\,372} - \frac{21}{15\,310}$, on peut réduire les fractions au même dénominateur.

En l'absence de d'autre méthode, écrit

$$\frac{65 \times 15\,310}{18\,372 \times 15\,310} - \frac{21 \times 18\,372}{15\,310 \times 18\,372} = \frac{995\,150}{281\,275\,320} - \frac{385\,812}{281\,275\,320} = \frac{609\,338}{281\,275\,320}$$

On simplifie ensuite $\frac{609\,338}{281\,275\,320}$ en cherchant par exemple le PGCD de 609 338 et de 281 275 320

et on obtient $\frac{199}{91\,860}$.

Si on avait pu prévoir que 91 860 était un multiple commun à 18 372 et à 15 310 (et même que c'était le plus petit multiple commun), les calculs en auraient été simplifiés.

En effet 91 860 étant égal à $18\,372 \times 5$ et à $15\,310 \times 6$, on aurait pu écrire

$$\frac{65 \times 5}{18\,372 \times 5} - \frac{21 \times 6}{15\,310 \times 6} = \frac{325}{91\,860} - \frac{126}{91\,860} = \frac{199}{91\,860}$$

La recherche des multiples communs à deux nombres présente donc un intérêt certain pour le calcul.

Propriété - Définition (voir [démonstration 01](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

L'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b possède un plus petit élément.

Ce plus petit élément est appelé "plus petit commun multiple" de a et b .

On le note $\text{PPCM}(a ; b)$.

Remarque

On a de façon immédiate : $\text{PPCM}(a ; b) = \text{PPCM}(b ; a)$.
Si b est multiple de a , $\text{PPCM}(a ; b) = b$

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Écrire l'ensemble des multiples strictement positifs de 10.

Écrire l'ensemble des multiples strictement positifs de 6

Écrire l'ensemble des multiples strictement positifs communs à 6 et à 10. Quel est le PPCM de 6 et 10

Donner le PGCD de 6 et 10 puis calculer $\text{PGCD}(6 ; 10) \times \text{PPCM}(6 ; 10)$. Que remarque-t-on ?

Quel est l'ensemble des multiples strictement positifs de $\text{PPCM}(6 ; 10)$? Que remarque-t-on ?

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

Écrire l'ensemble des multiples de a et l'ensemble des multiples de b , et en déduire $\text{PPCM}(a ; b)$ dans chacun des cas suivants :

1°) $a = 15$; $b = 24$

2°) $a = 8$; $b = 12$

3°) $a = 9$; $b = 16$

Propriétés (voir [démonstration 02](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- $\text{PGCD}(a ; b)$ divise $\text{PPCM}(a ; b)$
- $\text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b) = a \times b$
- Si a et b sont premiers entre eux, on a $\text{PPCM}(a ; b) = a \times b$
- Si k est un entier naturel non nul, on a $\text{PPCM}(ka ; kb) = k \text{PPCM}(a ; b)$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Pour chacun des couples $(a ; b)$, déterminer $\text{PGCD}(a ; b)$ et en déduire $\text{PPCM}(a ; b)$

1°) $a = 42$; $b = 184$

2°) $a = 56$; $b = 1716$

3°) $a = 115$; $b = 244$

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Pour chacun des couples $(a ; b)$, déterminer $\text{PPCM}(a ; b)$.

1°) $a = 13$; $b = 64$

2°) $a = 30$; $b = 1200$

3°) $a = 5 \times 2^{15}$; $b = 3 \times 2^{15}$

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

n est un entier naturel non nul, déterminer

1°) $\text{PPCM}(12n ; 15n)$

2°) $\text{PPCM}(2n ; 2n + 1)$

3°) $\text{PPCM}(5n + 7 ; 2n + 3)$

Propriété (voir [démonstration 03](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

L'ensemble des multiples communs à a et à b est l'ensemble des multiples de leur PPCM.

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Soient a , b et c trois entiers naturels non nuls.

Démontrer que si c est divisible par a et par b , alors c est divisible par $\text{PPCM}(a ; b)$.

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les nombres entiers naturels dont le reste dans la division euclidienne par 741 et dans la division euclidienne par 456 est 9.

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que $\text{PPCM}(n ; 26) = 78$.

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Soit S l'ensemble des couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a ; b) = 15$ et $\text{PPCM}(a ; b) = 180$

1°) Soit $(a ; b) \in S$. Montrer que l'on peut écrire a et b sous la forme :

$$a = 15k \text{ et } b = 15k' \quad k \text{ et } k' \text{ étant deux entiers naturels premiers entre eux.}$$

2°) Déterminer l'ensemble S .

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer deux entiers naturels dont le produit est 1344 et le PPCM 168.

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les couples d'entiers naturels a et b tels que

$$\text{PPCM}(a, b) = 1680 \text{ et } ab = 70560$$

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $a + b - \text{PPCM}(a ; b) = 1$.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $a + b - \text{PPCM}(a ; b) = 2$.

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

1°) Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels que $x + y = 27$ et $\text{PPCM}(x ; y) = 60$

2°) Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels que $x + y = 681$ et $\text{PPCM}(x ; y) = 5488$

Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient $8m = 105d + 30$.