

Plus grand commun diviseur : PGCD

Exemple 1

Pour simplifier la fraction $\frac{159390}{49005}$ on peut diviser successivement le numérateur et le dénominateur par 5, puis par 9 puis par 11.

$$\frac{159390}{49005} = \frac{31878}{9801} = \frac{3542}{1089} = \frac{322}{99}$$

La fraction $\frac{322}{99}$ alors obtenue ne peut plus être simplifiée.

Pour passer de $\frac{159390}{49005}$ à $\frac{322}{99}$ on a simplifié par $5 \times 9 \times 11 = 495$

495 correspond au plus grand diviseur qui soit commun aux deux nombres 159390 et 49005

Propriété - Définition (voir [démonstration 01](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Un entier naturel qui divise a et qui divise b est appelé diviseur commun à a et b .

L'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et b , on le note $\text{PGCD}(a ; b)$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 15 est $\{1 ; 3 ; 5 ; 15\}$

Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 12 est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$

L'ensemble des diviseurs communs à 12 et à 15 est donc $D(12 ; 15) = \{1 ; 3\}$

On a donc $\text{PGCD}(15 ; 12) = 3$

De même il est immédiat que $\text{PGCD}(2 ; 4) = 2$ et $\text{PGCD}(3 ; 5) = 1$

En écrivant l'ensemble des diviseurs de 159390 et l'ensemble des diviseurs de 49005, on peut obtenir $\text{PGCD}(159390 ; 49005) = 495$ (Exemple 1)

Remarque

a étant un entier naturel, l'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de $-a$.

On pourra étendre, si besoin est, la notion de PGCD à des nombres entiers relatifs.

On dira par exemple que $\text{PGCD}(-15 ; 12) = \text{PGCD}(15 ; 12) = 3$

Propriétés (voir [démonstration 02](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On a $\text{PGCD}(a ; b) \leq a$; $\text{PGCD}(a ; b) \leq b$; $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a)$

Si b divise a , on a $\text{PGCD}(a ; b) = b$, en particulier $\text{PGCD}(a ; 1) = 1$ et $\text{PGCD}(a ; a) = a$

Exemple 3

6 est un diviseur de 18 donc $\text{PGCD}(6 ; 18) = 6$

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

En écrivant les diviseurs de 18 et de 48 trouver $\text{PGCD}(18 ; 48)$

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer a) $\text{PGCD}(125468 ; 3)$ b) $\text{PGCD}(8625 ; 5)$ c) $\text{PGCD}(7253 ; 6)$

Propriété (voir [démonstration 03](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b . (On a $a = b \times q + r$)

Alors Si $r = 0$, $\text{PGCD}(a; b) = b$

Si $r \neq 0$, $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$

Exemple 4

Pour trouver le PGCD de 2414 et 804, on peut écrire la division euclidienne de 2414 par 804

$$2414 = 804 \times 3 + 2$$

On en déduit alors $\text{PGCD}(2414; 804) = \text{PGCD}(804; 2)$

Il est immédiat que $\text{PGCD}(804; 2) = 2$ car 2 divise 804. Donc $\text{PGCD}(2414; 804) = 2$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer a) $\text{PGCD}(584; 64)$

b) $\text{PGCD}(213; 5539)$

c) $\text{PGCD}(35691; 221)$

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Démontrer que le PGCD de deux entiers naturels non nuls et consécutifs est égal à 1.

Propriété - Algorithme d'Euclide (voir [démonstration 04](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On définit la suite r_n d'entiers naturels de la façon suivante :

$r_0 = b$; r_1 est le reste de la division euclidienne de a par b

Pour $n \geq 1$: si $r_n = 0$ alors $r_{n+1} = 0$

si $r_n \neq 0$ alors r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n

Alors il existe un entier n_0 tel que $r_{n_0} \neq 0$ et pour tout $n > n_0$, $r_n = 0$

On a $\text{PGCD}(a; b) = r_{n_0}$

Remarque

En effectuant ainsi des divisions euclidiennes successives: de a par b , puis du diviseur par le reste, ... le premier reste non nul est le PGCD de a et de b . C'est l'algorithme d'Euclide

Suivant les nombres a et b , le nombre d'itérations à effectuer peut être plus ou moins grand.

Sachant que $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a)$ on aura toujours intérêt à prendre $b \leq a$

Exemple 4

Pour déterminer le PGCD de 410258 et de 126
écrivons les divisions euclidiennes successives :

$$410258 = 126 \times 3256 + 2$$

$$126 = 2 \times 63 + 0$$

Donc $\text{PGCD}(410258; 126) = 2$

Pour déterminer le PGCD de 15648 et de 657
écrivons les divisions euclidiennes successives :

$$15648 = 657 \times 23 + 537$$

$$657 = 537 \times 1 + 120$$

$$537 = 120 \times 4 + 57$$

$$120 = 57 \times 2 + 6$$

$$57 = 6 \times 9 + 3$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

Donc $\text{PGCD}(15648; 657) = 3$

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD de

a) 853 et 212

b) 712 et 114

c) 650 et 8563

d) 12590 et 365

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de $n + 1$ et de $3n + 4$

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de $n^2 + 5n + 7$ et de $n + 1$

Propriété (voir [démonstration 05](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- L'ensemble des diviseurs communs à a et à b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.
- Pour tout entier naturel non nul k , on a $\text{PGCD}(ka ; kb) = k \times \text{PGCD}(a ; b)$.

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 656 et 312

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b < a$

Démontrer que $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - b ; b)$

En utilisant cette propriété, faire apparaître un algorithme de recherche du PGCD des deux nombres 3587 et 2743

Traduire cet algorithme en un programme sur calculatrice et/ou une feuille de calcul de tableur.

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

Traduire l'algorithme d'Euclide en un programme sur calculatrice et/ou une feuille de calcul de tableur.

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

Soit p un entier naturel. On sait que

$$17085 \equiv 12 \pmod{p} \quad \text{et} \quad 5399 \equiv 2 \pmod{p}$$

Déterminer p .

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

On dispose d'une plaque rectangulaire dont les dimensions sont 735 mm sur 504 mm

On veut découper dans cette plaque des carrés de côté x mm ($x \in \mathbb{N}$), sans qu'il y ait de perte de matière.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles on peut réaliser un tel découpage.

Quelle est la valeur de x maximale et quel est dans ce cas le nombre de carrés découpés.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$\text{PGCD}(a ; b) = 14 \quad \text{et} \quad a \times b = 2940$$

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$\text{PGCD}(a ; b) = 56 \quad \text{et} \quad a + b = 224$$

Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

Trouver le PGCD de 492480 et 165888

En déduire l'écriture de la fraction $\frac{492480}{165888}$ sous la forme d'une fraction irréductible.