

Nombres premiers entre eux

Exemple 1

On voudrait savoir s'il est possible de simplifier la fraction $\frac{1223}{717}$.

Pour cela on peut déterminer le PGCD de 1223 et 717. On trouve $\text{PGCD}(1223 ; 717) = 1$.

Par conséquent les nombres 1223 et 717 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (et -1).

On dit que ces deux nombres sont premiers entre eux.

La fraction $\frac{1223}{717}$ ne peut pas être simplifiée. On dit que c'est une fraction irréductible.

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Remarque

- Deux nombres sont donc premiers entre eux s'ils n'ont d'autres diviseurs communs que 1 et -1 .
- On dit aussi que a est premier avec b , ou que b est premier avec a .
- On dit aussi parfois que a et b sont étrangers.

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?

12 et 15 ; 34 et 39 ; 78 et 126 ; 245 et 515 ; 13 et 12813

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

Démontrer que toute fraction $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ est égale à une fraction $\frac{p'}{q'}$ irréductible.

(c'est-à-dire telle que p' et q' soient premiers entre eux)

Rappel

On dit qu'un entier naturel p strictement supérieur à 1 est premier si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p .

Propriété (voir [démonstration 01](#))

Soit a un entier relatif non nul.

Si p est un nombre premier qui ne divise pas a , alors $\text{PGCD}(a ; p) = 1$,

c'est-à-dire que a et p sont premiers entre eux.

(Si p est un nombre premier, p est premier avec tout entier qui n'est pas un de ses multiples)

Exemple 2

Démontrons que la fraction $\frac{12866}{13}$ est irréductible, c'est-à-dire que 12866 et 13 sont premiers entre eux.

La division euclidienne de 12866 par 13 peut s'écrire $12866 = 989 \times 13 + 9$.

Donc 12866 n'est pas divisible par 13.

Comme 13 est un nombre premier, on en déduit que 12866 et 13 sont premiers entre eux, c'est-à-dire que la fraction $\frac{12866}{13}$ est irréductible.

Théorème de Bezout (voir [démonstration 02](#))

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Remarque

Le théorème de Bezout est particulièrement intéressant pour travailler sur des expressions littérales ou sur des grands nombres.

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Démontrer, en utilisant le théorème de Bezout, la propriété :
le PGCD de deux entiers naturels non nuls et consécutifs est égal à 1.

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, les entiers n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a = 8n + 3$ et $b = 3n + 1$.

Déterminer une relation entre a et b , indépendante de n .

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a et b sont premiers entre eux.

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Démontrer que la droite d'équation $12x - 21y = 1$ n'a aucun point ayant des coordonnées entières.

Exemple 3

En utilisant l'algorithme d'Euclide démontrons que 383 et 127 sont premiers entre eux et déterminons des entiers relatifs u et v tels que $383u + 127v = 1$

On peut écrire $383 = 127 \times 3 + 2$ (1)

et $127 = 2 \times 63 + 1$ (2)

Donc $\text{PGCD}(383 ; 127) = 1$ c'est-à-dire que 383 et 127 sont premiers entre eux.

Pour déterminer les entiers relatifs u et v , l'idée est d'exprimer le 1 qui apparaît comme reste de la dernière division en fonction des nombres 383 et 127.

D'après l'égalité (2), on peut écrire $1 = 127 - 2 \times 63$ (3)

D'après l'égalité (1), on peut écrire $2 = 383 - 127 \times 3$

En remplaçant 2 par $383 - 127 \times 3$ dans l'égalité (3), on obtient :

$$1 = 127 - [383 - 127 \times 3] \times 63 = 127 - 383 \times 63 + 127 \times 3 \times 63 = 127(1 + 3 \times 63) - 383 \times 63$$

On obtient alors $383 \times (-63) + 127 \times (190) = 1$. On peut donc prendre $u = -63$ et $v = 190$.

Le couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs n'est pas unique, on peut vérifier que les couples $(u ; v) = (64 ; -293)$ $(u ; v) = (-317 ; 956)$ sont aussi des couples répondant à la question.

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant l'algorithme d'Euclide démontrer que 812 et 451 sont premiers entre eux et déterminer des entiers relatifs u et v tels que $812u + 451v = 1$.

Théorème de Gauss (voir [démonstration 03](#))

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif.

Si a divise bc et si a est premier avec b , alors a divise c .

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les entiers relatifs x et y tels que :

a) $12x = 7y$

b) $11x - 24y = 0$

c) $125x + 35y = 0$

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

- 1°) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $3u + 5v = 1$.
- 2°) On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la droite D d'équation $3x + 5y - 1 = 0$.
En utilisant le résultat du 1°), déterminer un point du plan à coordonnées entières appartenant à D .
- 3°) On cherche à déterminer tous les points du plan à coordonnées entières appartenant à D .
Soit $M(x; y)$ un point à coordonnées entières appartenant à D .
- a) Démontrer que $3(x - u) = 5(v - y)$ (u et v étant les nombres trouvés dans la première question)
- b) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que : $x - u = 5k$ et $y - v = -3k$
- c) Justifier que l'ensemble des points à coordonnées entières de D est l'ensemble des points de coordonnées $(u + 5k; v - 3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- d) Déterminer tous les points à coordonnées entières de D appartenant aussi au disque de centre O et de rayon 10.

Propriété (voir [démonstration 04](#))

Soient a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier.
Si p divise le produit ab , alors p divise a ou p divise b .

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

- 1°) On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q premiers entre eux tels que $2q^2 - p^2 = 0$.
Montrer qu'alors p est un nombre pair et en déduire que q est aussi un nombre pair.
Que peut-on en conclure ?
- 2°) Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$
 p et q étant deux entiers premiers entre eux.

Propriété (voir [démonstration 05](#))

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux et soit n un entier naturel.
Si n est divisible par a et par b , alors n est divisible par le produit ab .

Exemple 4

Si un nombre est divisible par 5 et par 6, alors il est divisible par 30. (puisque 5 et 6 sont premiers entre eux)

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant les critères de divisibilité, montrer que 1008 est divisible par 36.
Même question avec 1 000 008.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire du reste de la division euclidienne de $10^n + 8$ par 36 ?

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

- 1°) $n(n+1)$ est divisible par 2. 2°) $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.
- 3°) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24. 4°) $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Propriété (voir [démonstration 06](#))

Soient a, b des entiers relatifs non nuls et D un entier naturel non nul.
 $D = \text{PGCD}(a; b) \Leftrightarrow \frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont des entiers relatifs non nuls premiers entre eux.
 $\Leftrightarrow a = Da'$ et $b = Db'$ a' et b' étant deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $\text{PGCD}(x; y) = 12$ et $x + y = 96$.

Théorème (petit théorème de Fermat) (voir [démonstration 07](#))

Soit p un nombre premier. Pour tout entier a non multiple de p , $a^{p-1} - 1$ est divisible par p .

Exemple

7 est un nombre premier, donc $2^6 - 1$ est divisible par 7 ($2^6 - 1 = 63 = 7 \times 9$)
 $3^6 - 1$ est divisible par 7 ($3^6 - 1 = 728 = 7 \times 104$)
 $4^6 - 1$ est divisible par 7 ($4^6 - 1 = 4095 = 7 \times 585$)
 $5^6 - 1$ est divisible par 7 ($5^6 - 1 = 15624 = 7 \times 2232$)
etc ...

Remarque

Ce théorème est appelé "petit" théorème de Fermat par opposition au "grand" théorème de Fermat (pour n entier, $n \geq 3$, on ne peut pas trouver d'entiers naturels non nuls x , y et z tels que $x^n + y^n = z^n$)
Le "grand" théorème de Fermat, énoncé au 17ème siècle ne fut démontré qu'en 1995 par Andrew Wiles.

Propriété (voir [démonstration 08](#))

Soit p un nombre premier. Pour tout entier a , $a^p - a$ est divisible par p .

Exemple

$8^7 - 8$ est multiple de 7
 $15^5 - 15$ est multiple de 5
etc....