

NOMBRES COMPLEXES

I Définition - Représentation géométrique

Rappel

Pour tout réel k , il existe un unique nombre réel dont le cube est k .

Ce nombre est appelé racine cubique de k . Il est noté $\sqrt[3]{k}$ ou aussi $k^{\frac{1}{3}}$.

On a par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ parce que $2^3 = 8$.

La touche "puissance" des calculatrices permet de donner des valeurs approchées des racines cubiques :

avec une calculatrice TI on écrit par exemple $5^{(1/3)}$ et on obtient environ 1,71. On a donc $\sqrt[3]{5} \approx 1,71$

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Au XVIème siècle, Jérôme Cardan, confronté à la résolution des équations du troisième degré, de la forme $x^3 = px + q$ donne la formule suivante appelée formule de CARDAN :

lorsque $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$, l'équation a pour solution $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$

1) On considère l'équation $x^3 = 1$. Quelles sont les valeurs de p et q ?

Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.

Quelle solution obtient-on ?

2) On considère l'équation $x^3 = 3x + 2$

Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.

Quelle solution obtient-on ? Vérifier. (Facultatif : Trouver toutes les solutions de l'équation $x^3 = 3x + 2$)

3) On considère l'équation $x^3 = 2x + 4$

Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.

Donner en utilisant une calculatrice une valeur approchée de la solution obtenue.

Vérifier. (Facultatif : Trouver toutes les solutions de l'équation $x^3 = 2x + 4$)

4) On considère l'équation $x^3 = 15x + 4$

Justifier que la formule de Cardan ne peut pas s'appliquer.

Pris dans un engrenage infernal, on décide cependant d'appliquer la formule.

Comment peut s'écrire la "solution" ?

5) Imaginons un nombre dont le carré est -1 , et qui sera très temporairement noté $\sqrt{-1}$.

En utilisant ce nombre "imaginaire" et en effectuant des calculs "habituels", montrer que

$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$. En déduire que $2 + \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 + \sqrt{-121}$.

"Démontrer" de même que $2 - \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 - \sqrt{-121}$.

Montrer alors que la formule de Cardan appliquée à l'équation $x^3 = 15x + 4$ donne comme solution le réel 4. Vérifier que 4 est effectivement solution de l'équation.

On a donc, en utilisant des nombres "imaginaires", obtenu un résultat bien réel (et juste).

6) Que peut-on dire de $\sqrt{a}\sqrt{b}$ lorsque a et b sont deux réels strictement positifs.

Justifier que cette propriété appliquée au nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ est en contradiction avec la définition même de ce nombre.

Pour cette raison la notation $\sqrt{-1}$ que vous avez utilisé en toute impunité depuis quelques minutes (ou quelques heures) est absolument interdite à partir de maintenant. (dans la réalité, il a fallu 150 ans pour l'abandonner et utiliser la notation i proposée par Euler)

Remarque

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
Cette équation a une solution notée -1 , cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
 $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\mathbb{N}$ est contenu dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution.
Cette équation a une solution notée $\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombre rationnels.
C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
 $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions.
Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombre réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.
 $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions.
Cette équation a deux solutions notées i et $-i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombre complexes.
C'est l'ensemble des nombres de la forme $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
 $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + bi$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z .

Nombres complexes particuliers

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$)
- si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarque

- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite.
Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$.
(Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a ; b)$.
On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif (c'est-à-dire supérieur à 0).

Propriété (voir démonstration 01)

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est unique.

Définition

Soit un nombre complexe z .

L'écriture $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z .
 a est appelé partie réelle de z , et b partie imaginaire de z . On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarque

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.
- L'écriture d'un nombre complexe sous la forme algébrique est unique.

Propriété (voir démonstration 02)

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a; b) = (a'; b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Exercice 02 (voir réponses et correction)

Soit $z = 2 + 3i$; $z' = i - 5$.

Calculer et écrire sous la forme algébrique $z + z'$; $z - z'$; $2z - 3z'$; $z.z'$; z^2

(Si votre calculatrice permet de travailler sur les nombres complexes, vérifier le résultat)

Définition

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Au point M de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

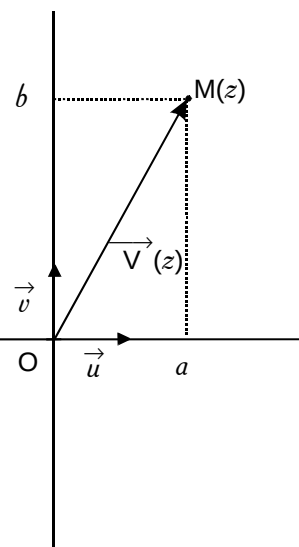
On dit que $z = a + bi$ est l'axe de M ou que $M(a; b)$ est l'image ponctuelle de $z = a + bi$.

Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est l'axe de $\vec{V}$ ou que

$\vec{V}(a; b)$ est l'image vectorielle de $z = a + bi$.

Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son axe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.



Exercice 03 (voir réponses et correction)

Placer dans le plan complexe, les points d'axes :

$$z_1 = 2 + 3i \quad ; \quad z_2 = 3 + i \quad ; \quad z_3 = -1 + 2i \quad ; \quad z_4 = 2 - i \quad ; \quad z_5 = i$$

$$z_6 = -i \quad ; \quad z_7 = 1 \quad ; \quad z_8 = -i - 3 \quad ; \quad z_9 = 2z_1 - 3z_2 \quad ; \quad z_{10} = z_3(z_4 - z_2)$$

Propriété (voir démonstration 03)

Si M a pour axe $z = a + bi$ et si M' a pour axe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors

- le vecteur $\vec{MM'}$ a pour axe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$

- $OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $MM' = \|\vec{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$

- le milieu I de $[MM']$ a pour axe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

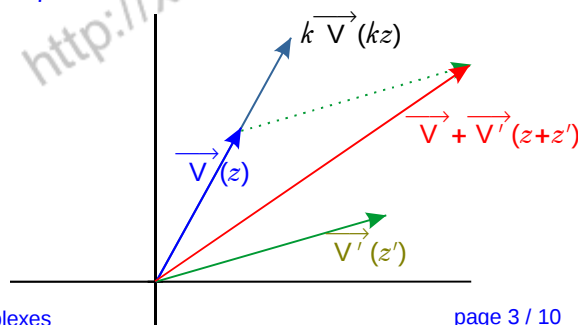
- le barycentre G de (M ; α) et (M' ; β) a pour axe $z_G = \frac{\alpha z + \beta z'}{\alpha + \beta}$ ($\alpha + \beta \neq 0$).

Propriété (voir démonstration 04)

Si $\vec{V}$ a pour axe z et $\vec{V'}$ pour axe z' ,

alors $\vec{V} + \vec{V'}$ a pour axe $z + z'$.

Si k est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour axe kz .



Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Étant donné un point M d'affixe $z = a + bi$, avec a et b réels.

Placer

- le point M' d'affixe $z' = a - bi$,
- le point M'' d'affixe $z'' = -a + bi$,
- le point M''' d'affixe $z''' = -a - bi = -z$.

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

1°) Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{3 + 2i}$

2°) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $\frac{1}{1 + i}$; $\frac{1}{3 - i}$; $\frac{1}{i}$

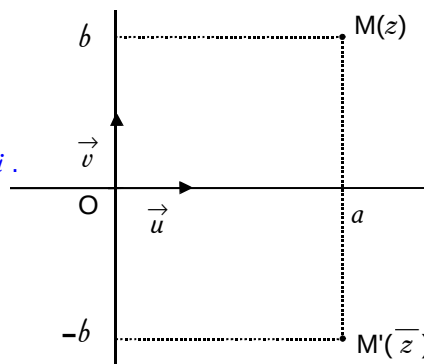
Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - bi$.

Remarque

Si M est le point d'affixe z , le point M' d'affixe $\bar{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

**Exercice 06** (voir [réponses et correction](#))

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer $\bar{z}$; $\bar{z'}$; $\overline{z + z'}$; $\overline{z + z'}$; $\overline{z + z'}$; $\overline{z \cdot z'}$; zz' ; $\overline{zz'}$.

Propriétés (voir [démonstration 05](#))

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $z \cdot \bar{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Remarque

La propriété $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}_+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

Par exemple : $\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 - (i)^2} = \frac{1 + 3i}{4 + 1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

1°) Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{2 + 7i} ; \frac{4}{\sqrt{3} - i} ; \frac{2 - i}{5 + 3i} ; \frac{i}{1 - 3i} ; \frac{2 + i}{i}$$

2°) Résoudre l'équation $(1 + i)z = 3 - 2i$, donner la solution sous la forme algébrique.

3°) Le nombre complexe $2 - i$ est-il solution de l'équation $(1 - i)z + 1 + 3i = 0$?

4°) Le nombre complexe $\frac{1 + 3i}{5}$ est-il solution de l'équation $5z^2 - 2z + 2 = 0$?

5°) Écrire plus simplement le nombre complexe $\frac{\sqrt{7} + 5i}{2\sqrt{7} - 2i} + \frac{2\sqrt{7} - 2i}{\sqrt{7} + 5i}$

II Forme trigonométrique - Module - Argument

Rappel

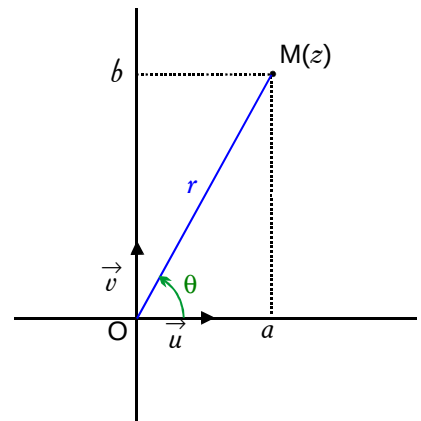
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soit M un point de coordonnées $(a; b)$.

Si $M \neq O$, on dit que $(r; \theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M lorsque :

$$r = OM \text{ et } \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$$

On a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$

Si z est l'affixe de M , $z = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$



Remarque

Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |x|$

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une forme trigonométrique de z .

Propriété (voir démonstration 06)

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

Définition

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle module de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

On note $r = |z|$

Remarque

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.

Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x " ou "module de x ".

Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z ".

Exercice 08 (voir réponses et correction)

1°) Calculer le module de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = 3 + 4i$$

$$z_2 = 1 - i$$

$$z_3 = 5 - \frac{i}{2}$$

$$z_4 = 3$$

$$z_5 = i - 4$$

$$z_6 = i$$

$$z_7 = -5$$

$$z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2°) Donner les formes trigonométriques de :

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_4 = i$$

Propriété (voir démonstration 07)

Soit $\vec{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\vec{V}\| = |z|$.

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $AB = |z_B - z_A|$.

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - 3i$ et $b = 5 - i$.
Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

Propriétés (voir [démonstration 08](#))

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad ; \quad |-z| = |z| \quad ; \quad |\bar{z}| = |z| \quad ; \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|zz'| = |z| \cdot |z'| \quad ; \quad \text{si } z' \neq 0 \quad \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad (\text{donc } z\bar{z} \in \mathbb{R}_+) \quad ; \quad \text{si } z \neq 0 \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Les questions sont totalement indépendantes.

- 1°) Calculer le module des nombres complexes suivants : $(7 + 35i)(3 + 2i)$; $\frac{7 - 35i}{3 - 2i}$; $\frac{(5 + 3i)(1 + i)}{4 + i}$
- 2°) Déterminer tous les points M d'affixe z tels que $z\bar{z} = 4$.
- 3°) On considère le point A d'affixe $(2 + 3i)$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - (2 + 3i)| = 5$.
- 4°) Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer $|j|$. Démontrer que $j^2 = \bar{j}$. En déduire que $j^3 = 1$.
(On dit que j est une racine cubique de 1)

Définition

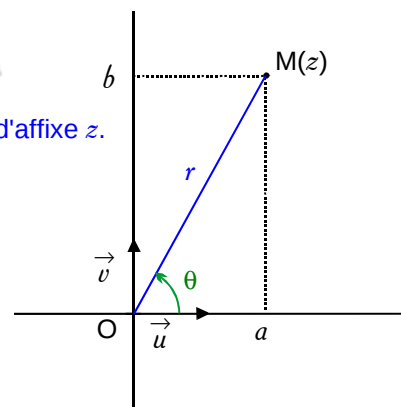
Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$

On note $\theta = \arg(z)$

Remarque

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π .

**Exercice 11** (voir [réponses et correction](#))

Ecrire sous la forme trigonométrique $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$ et $\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$

Propriété (voir [démonstration 09](#))

Soient θ et θ' deux réels et soient z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' on a :

- $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$ $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z [2\pi]$
- $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' [2\pi]$
- $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\arg(z^n) = n \arg z [2\pi]$
- $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ $\arg(\bar{z}) = -\arg z [2\pi]$
- $-(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$ $\arg(-z) = \arg z + \pi [2\pi]$

Propriété (voir [démonstration 10](#))

Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique.

$\bar{z}$ et $-z$ ont pour formes trigonométriques :

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \quad \text{et} \quad -z = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$$

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Soit $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

En déduire les formes trigonométriques de $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$; $\bar{z_1}$; $-z_2$; $\frac{(z_1)^2}{z_2}$

Remarque

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres.

C'est-à-dire que la fonction $\theta \mapsto \varphi(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ est telle que $\varphi(\theta + \theta') = \varphi(\theta) \times \varphi(\theta')$.

Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

Notation

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$

Cette notation est appelée notation exponentielle.

Propriétés

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = e^{ni\theta} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta + \pi)}$$

Remarques

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les formules d'addition :
 $\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$ et $\sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$
- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les formules de duplication :
 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ et $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- On peut vérifier que : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les formules d'EULER.
- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée formule de MOIVRE.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

On considère les nombres complexes : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1° Donner la forme exponentielle de Z .

2° Donner les formes algébriques de z_1 et z_2 . En déduire la forme algébrique de Z .

3° En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Écrire sous la forme exponentielle ou sous la forme trigonométrique les nombres complexes :

$$a = 3 + \sqrt{3}i \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{2}}{1-i} \quad ; \quad c = \frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}} \quad ; \quad d = -2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

III Utilisation en Géométrie

Rappel

La notion de distance correspond au module, la notion d'angle à l'argument.

Propriétés (voir démonstration 11)

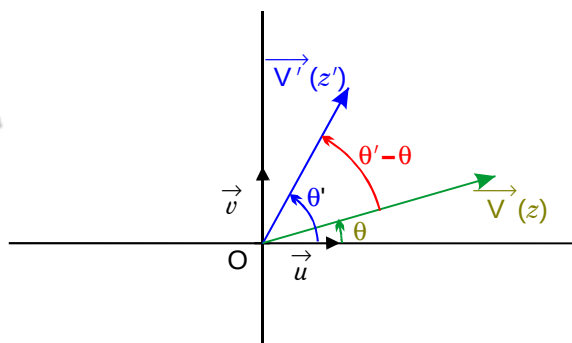
Soient $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ d'affixes respectives z et z' dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Si z et z' ont pour formes trigonométriques :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{et} \quad z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

Alors :

- $(\vec{u}, \vec{V}) = \theta = \arg z \quad [2\pi]$.
- $(\vec{V}, \vec{V}') = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$.



Propriétés (voir démonstration 12)

A, B, C et D étant des points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D dans le plan complexe de repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, alors :

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a : $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.
- $\frac{CD}{AB} = \left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right|$ et $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$.
- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0 \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$
 $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{AC} = k \vec{AB}, k \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\pi]$

Exercice 15 (voir réponses et correction)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1$, $b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$

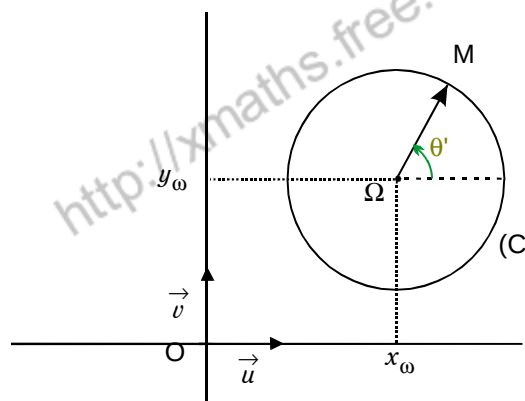
Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et l'écrire sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC.

Propriété (voir démonstration 13)

On considère le cercle (C) de rayon r et de centre Ω d'affixe $z_\omega = x_\omega + i y_\omega$ avec x_ω et y_ω réels.

Soit M un point d'affixe $z = x + i y$ avec x et y réels.

$$\begin{aligned} M \in (C) &\Leftrightarrow |z - z_\omega| = r \\ &\Leftrightarrow z = z_\omega + r e^{i\theta} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_\omega + r \cos \theta \\ y = y_\omega + r \sin \theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

Le plan complexe est rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la translation $\mathcal{L}$ de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $w = 2 + i$, l'homothétie h de centre A d'affixe $a = 2 + 4i$ et de rapport $-\frac{3}{2}$ et la rotation r de centre B d'affixe $b = 1 - i$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit M le point d'affixe z .

1) Soit M_1 d'affixe z_1 l'image de M par $\mathcal{L}$.

Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM_1}$. En déduire l'expression de z_1 en fonction de z .

2) Soit M_2 d'affixe z_2 l'image de M par h .

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AM}$. En déduire l'expression de z_2 en fonction de z .

3) Soit M_3 d'affixe z_3 l'image de M par r .

Déterminer $\frac{BM_3}{BM}$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM_3})$. En déduire le module et l'argument de $\frac{z_3 - b}{z - b}$.

En déduire l'expression de z_3 en fonction de z .

4) Utiliser les résultats précédents pour trouver les affixes des images par $\mathcal{L}$, h et r du point O.

Propriétés (voir [démonstration 14](#))

- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + b$ où b est un nombre complexe fixé, est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe b .
- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = k(z - \omega)$ où k est un nombre réel non nul fixé et ω un nombre complexe fixé, est l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k .
- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ où α est un nombre réel fixé et ω un nombre complexe fixé, est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α .

Remarque

L'expression de z' en fonction de z est appelée écriture complexe de l'application.

Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

Reconnaître la transformation du plan qui au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' avec :

$$z' = z - 3 + 2i \quad ; \quad z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z \quad ; \quad z' = -z \quad ; \quad z' - i = 2(z - i) \quad ; \quad z' = -iz \quad ; \quad z' + 1 = iz + i.$$

Exercice 18 (voir [réponses et correction](#))

Donner l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{v}(1; 2)$, de l'homothétie de centre A d'affixe $-1 + i$ et de rapport -3 et de la rotation de centre B d'affixe $2 - 4i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 19 (voir [réponses et correction](#))

Étant donnés A($1 + i$) et B($2 - 3i$), déterminer les affixes des points M tels que ABM soit un triangle équilatéral.

IV Équation du second degré à coefficients réels

Exercice 20 (voir [réponses et correction](#))

1) On considère l'équation (E) : $z^2 - 4z - 5 = 0$.

a) Montrer que : (E) $\Leftrightarrow (z - 2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow [(z - 2) - 3][(z - 2) + 3] = 0$.

b) En déduire les solutions de (E).

2) On considère l'équation (F) : $z^2 - 4z + 13 = 0$.

a) Montrer que : (F) $\Leftrightarrow (z - 2)^2 + 9 = 0$.

b) En remarquant que $9 = -(3i)^2$, trouver les solutions de (F).

Propriété (voir [démonstration 15](#))

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a , b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :
 $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Dans les deux cas, si on pose $\Delta = \delta^2$ (avec δ réel lorsque $\Delta \geq 0$ et δ imaginaire pur si $\Delta < 0$)

on peut écrire : $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exercice 21 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 + 3z - 4 = 0 \quad ; \quad 4z^2 - 4z + 1 = 0 \quad ; \quad 2z^2 - 5z + 7 = 0$$

Exercice 22 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad 2z^2 - 2(1 + \cos \theta)z + 1 + \cos \theta = 0 \quad \text{où } \theta \text{ est un réel fixé} \quad ; \quad z^4 + 4z^2 + 3 = 0$$