

Logarithme Népérien

I Définition - Propriétés

Rappel

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$.

C'est-à-dire que pour tout $k \in]0; +\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.
(Cette solution a été notée $\ln k$)

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre l'unique réel y tel que $e^y = x$.

La fonction logarithme népérien est notée $\ln$, c'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

On notera :
$$\begin{aligned}]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

Propriétés (voir démonstration 01)

- Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel x , on a $\ln e^x = x$
- $\ln 1 = 0$ • $\ln e = 1$
- $\begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$
- La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 01 (voir réponses et correction)

Déterminer $\ln e^2$; $\ln e^{-3}$; $e^{\ln 6}$; $e^{\ln 2 + \ln 3}$

Justifier que $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$

Démontrer que $\ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}$

Exercice 02 (voir réponses et correction)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $\ln x = 4$; $\ln x = -2$; $3 \ln x = 2$; $\ln x + \ln 5 - \pi = 0$

Remarque

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

Propriétés (voir démonstration 02)

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad ; \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad ; \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$

Propriété (voir démonstration 03)

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n réels strictement positifs ($n \in \mathbb{N}^*$), alors

$$\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$$

(Le logarithme népérien d'un produit de n nombres est égal à la somme des logarithmes népériens de ces nombres)

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Écrire plus simplement : $\ln 14 - \ln 7$; $\ln \frac{5}{2} + \ln \frac{2}{5}$; $\frac{\ln 100}{\ln 10}$
 $\ln 8 - \ln 12 + \ln 15$; $\ln 10\,000 + \ln 0,01$; $\ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Démontrer que pour tout réel x , on a : $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 2 + \ln 3$

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

- $\ln(x^2 + x) = 1$
- $\ln x + \ln(x + 1) = 1$

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(4 - x) = \ln(2x - 1) + \ln 3$

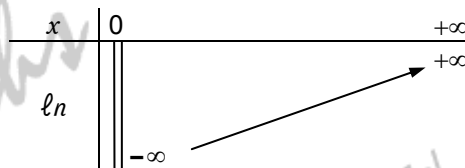
Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

- $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$
- $\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1)$

II Étude de la fonction logarithme népérien**Propriété** (voir [démonstration 04](#))

- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- si $x > 1$ alors $\ln x > 0$; si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$
- La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $\ln' x = \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
- Le tableau de variations de la fonction $\ln$ est :

**Propriété** (voir [démonstration 05](#))

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\ln(1+x)$ a pour approximation affine x au voisinage de 0.

Propriété (voir [démonstration 06](#))

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

Au voisinage de l'infini x l'emporte sur le logarithme népérien de x .
 (On pourra utiliser ceci comme une règle opératoire)

Courbe représentative

On a vu que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

La courbe $\mathcal{C}$ de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe Oy

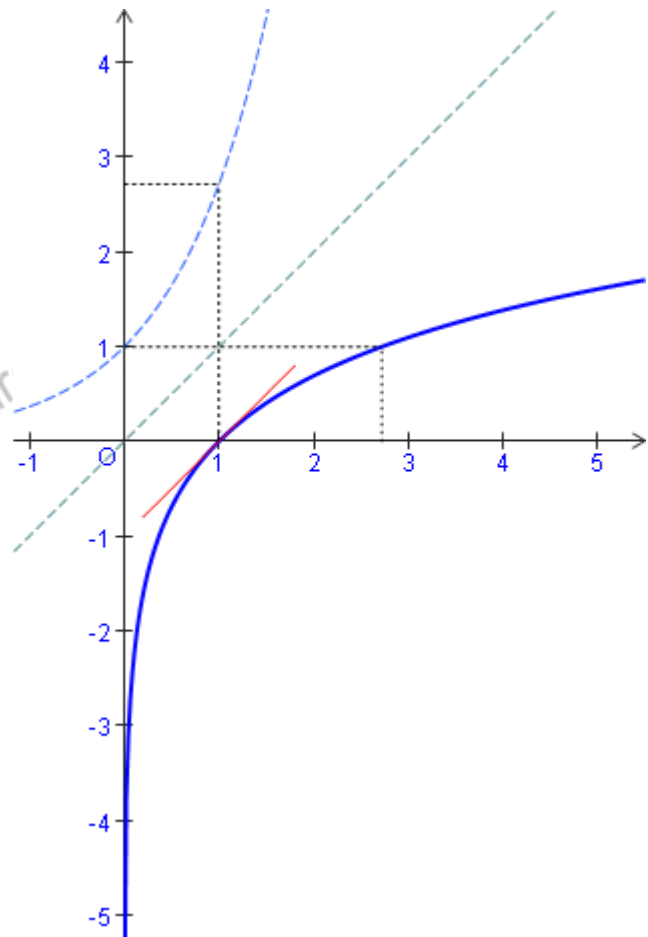
On a vu que $\ln(1+x)$ a pour approximation affine x au voisinage de 0,

La courbe a pour tangente au point d'abscisse 1 la droite T d'équation $y = x - 1$
(On peut justifier que la courbe se situe au-dessous de cette tangente)

On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

on dit que la courbe a pour direction asymptotique l'axe Ox au voisinage de $+\infty$

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Propriété (voir [démonstration 07](#))

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , la fonction $\ln \circ u$ qui à x associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur I , et on a : $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$$f(x) = \ln(3x - 1)$$

$$g(x) = 2 \ln x$$

$$h(x) = \ln(x^2)$$

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$$f(x) = 2x + 1 + \ln x$$

$$g(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$h(x) = \ln(2x - x^2)$$

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$$f(x) = x \ln x - x$$

$$g(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{x+1}$$

$$h(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$$

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer dans quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$$f(x) = \ln(e^x + 1)$$

$$g(x) = x^2 + (\ln x)^2$$

$$h(x) = e^x \ln x$$

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$\ln x < 1$

$2 \ln x - 1 \geq 0$

$\ln(2x - 1) + 1 \leq 0$

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$\ln x > \ln(2x - 1)$

$\ln(1 + e^x) > 0$

$\ln \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \geq 1$

Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - \ln x$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + \frac{1}{x} - 1$

Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$

Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$

Exercice 18 (voir [réponses et correction](#))On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ Faire l'étude et la représentation graphique de f .**Exercice 19** (voir [réponses et correction](#))On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2$ Faire l'étude et la représentation graphique de f .Étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.**Exercice 20** (voir [réponses et correction](#))On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ Donner l'ensemble de définition de f . Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique.**Exercice 21** (voir [réponses et correction](#))On considère la fonction f définie sur $] -2; 2[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.Soit $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ a pour centre de symétrie le point O.**Exercice 22** (voir [réponses et correction](#))On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ Donner l'ensemble de définition de f . Étudier les variations de f .Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f a pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x$.Tracer $(\mathcal{C})$.

III Logarithme décimal

Remarque

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x = 10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x = 100$, la valeur 3 lorsque $x = 1000$ etc...) Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal.

Définition

On appelle fonction logarithme décimal et on note $\log$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Propriétés (voir démonstration 08)

- $\log 1 = 0$
- $\log 10 = 1$;
- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
 $\log(a \times b) = \log a + \log b$; $\log \frac{1}{a} = -\log a$; $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log a^n = n \log a$

Remarque

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \times \ln x$ avec $k = \frac{1}{\ln 10}$

Il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative.

