

LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

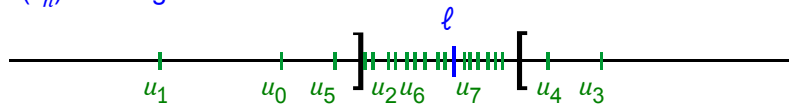
I Limites de suites

Définition

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel.

Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ , ou que la suite (u_n) converge vers ℓ .

On écrira $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



Remarque

- Dire qu'une suite converge vers ℓ revient aussi à dire que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.
- Dire qu'une suite converge vers ℓ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi proche de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.

Propriété (voir démonstration 01)

Si une suite (u_n) converge, sa limite est unique.

Exercice 01 (voir réponses et correction)

On considère la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

1°) Calculer $u_1, u_2 \dots u_{10}$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2°) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

3°) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01, c'est-à-dire $]1,99 ; 2,01[$.

Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.

4°) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon r , c'est-à-dire $]2 - r ; 2 + r[$.

Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de r , tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.

5°) Démontrer que (u_n) converge vers 2.

Définition

Soit (u_n) une suite.

Si tout intervalle de la forme $]a ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. On écrira $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si tout intervalle de la forme $]-\infty ; a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$. On écrira $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

- Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que tout intervalle $]a ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.
- Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.
- Le mot de convergence n'est utilisé que dans le cas d'une limite finie.

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2 + 2}{n}$ pour $n \geq 1$

1°) Calculer $u_1, u_2 \dots u_{10}$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2°) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

3°) On considère l'intervalle $]10 ; +\infty[$

Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

4°) On considère l'intervalle $]a ; +\infty[$ avec $a \geq 10$

Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de a , tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

5°) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

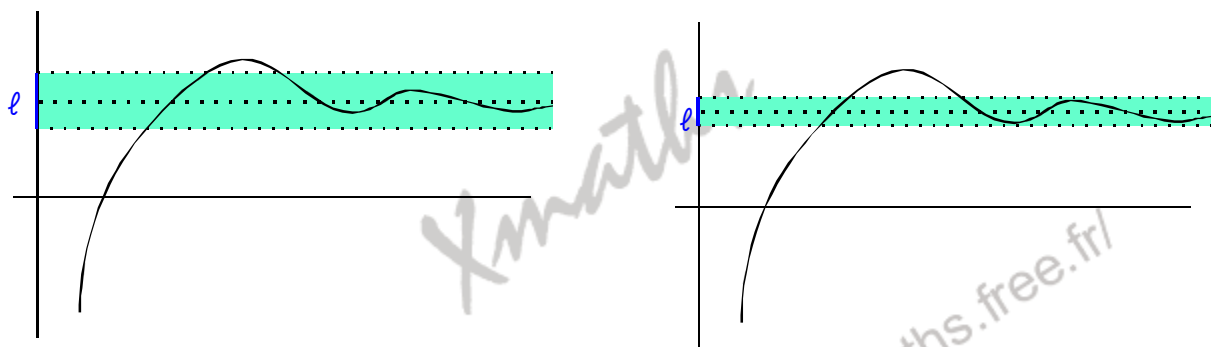
II Limites de fonctions - Asymptotes

Définition limite d'une fonction en $+\infty$

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $]a ; +\infty[$ et soit ℓ un nombre réel.

Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, on dit que la fonction f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. On écrira $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) de f au voisinage de $+\infty$.



Remarque

- Dire que la fonction f a pour limite ℓ au voisinage de $+\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut lorsque x est assez grand.

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$

1°) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de $f(1)$; $f(10)$; $f(100)$; $f(3234)$.

2°) Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en $+\infty$?

3°) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01, c'est-à-dire $]1,99 ; 2,01[$.

Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]1,99 ; 2,01[$. (On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$)

4°) On considère l'intervalle $]2 - r ; 2 + r[$ avec $r > 0$.

Montrer que pour x supérieur à un certain x_0 à déterminer en fonction de r , tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]2 - r ; 2 + r[$.

5°) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + x^2$

1°) Donner les valeurs de $f(1)$; $f(10)$; $f(100)$; $f(5812)$.

2°) Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en $+\infty$?

3°) On considère l'intervalle $]100 ; +\infty[$.

Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]100 ; +\infty[$.

4°) On considère un intervalle $]A ; +\infty[$, avec $A > 0$.

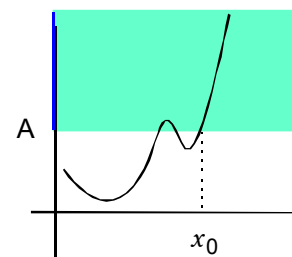
Montrer que pour x supérieur à $\sqrt{A}$, tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]A ; +\infty[$.

Définitions limite d'une fonction en $+\infty$

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $]a ; +\infty[$.

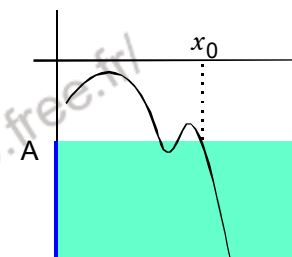
- Si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, on dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

On écrira $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.



- Si tout intervalle de la forme $]-\infty ; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, on dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

On écrira $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.



Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Définitions limite d'une fonction en $-\infty$

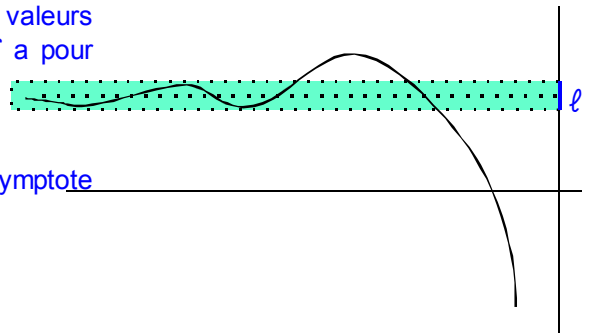
Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $]-\infty ; a[$

- Soit ℓ un nombre réel.

Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand négatif, on dit que la fonction f a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$.

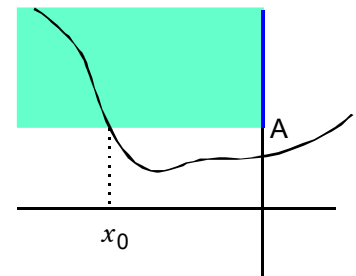
On écrira $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) de f au voisinage de $-\infty$.



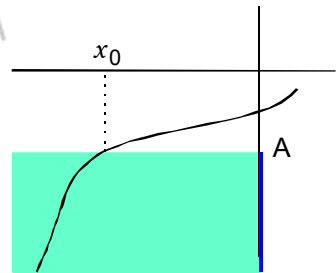
- Si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand négatif, on dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

On écrira $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.



- Si tout intervalle de la forme $]-\infty ; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand négatif, on dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

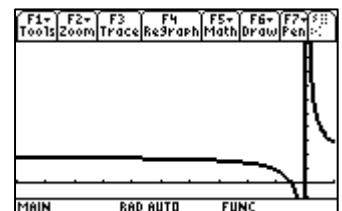
On écrira $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$.



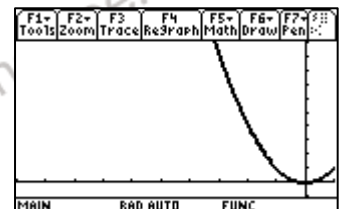
Exemples

On peut, en visualisant les représentations graphiques conjecturer que :

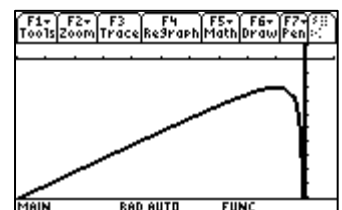
la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $-\infty$



la fonction $x \mapsto x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$



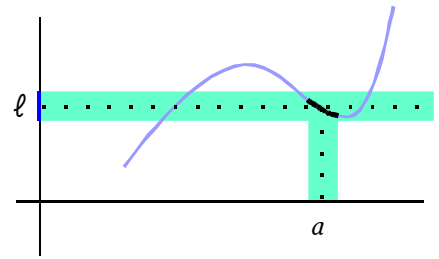
la fonction $x \mapsto \frac{1+x^2}{x}$ a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$



Définitions limite d'une fonction en a

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]a ; a + r[$ ou $]a - r ; a[$ (r étant un réel positif)

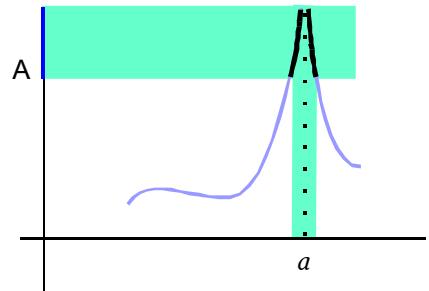
- Soit ℓ un nombre réel.
Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a , on dit que la fonction f a pour limite ℓ quand x tend vers a . On écrira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$.



- Si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a , on dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a .

On écrira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f = +\infty$.

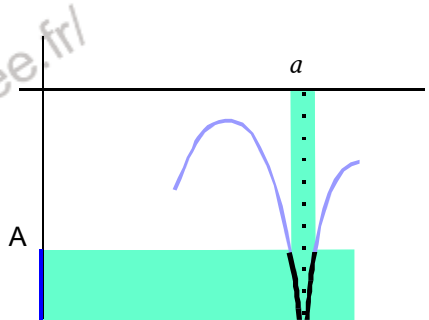
Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) de f .



- Si tout intervalle de la forme $]-\infty ; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a , on dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a .

On écrira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$.

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) de f .



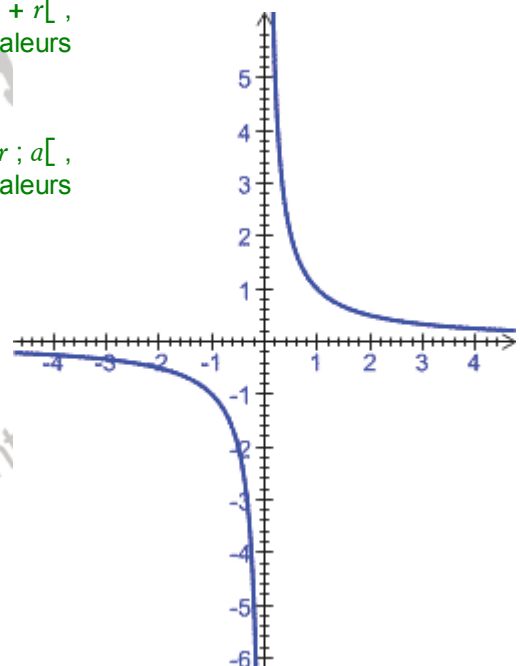
Remarque

Lorsqu'on considère uniquement les réels x de l'intervalle $]a ; a + r[$, on parlera de limite à droite en a ou de limite en a par valeurs supérieures, on notera $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}}$

Lorsqu'on considère uniquement les réels x de l'intervalle $]a - r ; a[$, on parlera de limite à gauche en a ou de limite en a par valeurs inférieures, on notera $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}}$

Par exemple pour la fonction f définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$



Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{3}{(x-1)^2}$.

1°) Justifier que l'ensemble de définition de f est $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2°) Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en 1 ?

3°) On considère l'intervalle $]1000; +\infty[$.

Donner une condition portant sur x pour que, $f(x) \in]1000; +\infty[$.

4°) On considère un intervalle $]A; +\infty[$ avec $A > 2$.

Donner une condition suffisante portant sur x pour que, $f(x) \in]A; +\infty[$.

5°) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

Remarque

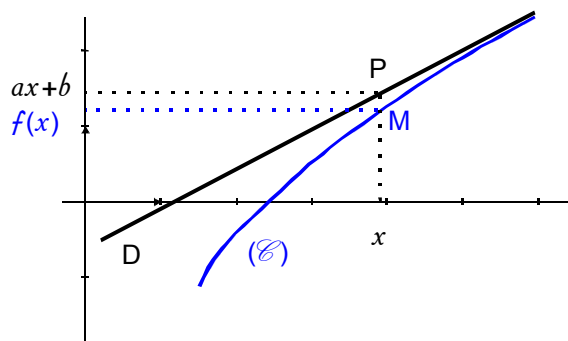
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative d'une fonction f et (D) la droite d'équation $y = ax + b$

Soit x un réel

Le point M de $(\mathcal{C})$ d'abscisse x a pour ordonnées $f(x)$

Le point P de (D) d'abscisse x a pour ordonnée $ax + b$

$f(x) - (ax + b)$ correspond à la différence des ordonnées de ces deux points.



Définition

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, on dit que la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f a pour asymptote la droite (D) d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, on dit que la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f a pour asymptote la droite (D) d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $-\infty$.

Remarque

Lorsque $a = 0$, la droite (D) a pour équation $y = b$, elle est parallèle à l'axe (Ox).

On utilisera parfois dans ce cas le terme d'asymptote horizontale.

Lorsque $a \neq 0$, on utilisera parfois le terme d'asymptote oblique.

Propriété (voir [démonstration 02](#))

Soient f une fonction définie sur $]\alpha; +\infty[$. S'il existe une fonction h et deux réels a et b et tels que

pour $x \in]\alpha; +\infty[$ $f(x) = ax + b + h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$,

la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f a pour asymptote la droite (D) d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque

On a une propriété similaire pour une asymptote en $-\infty$

Exemple

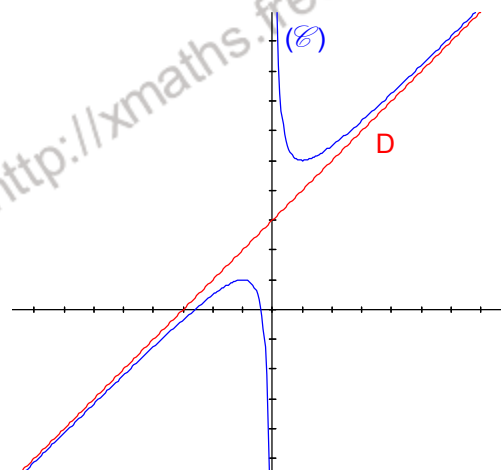
La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$ a pour asymptote oblique la droite (D)

d'équation $y = x + 3$ quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$.

En effet $f(x) = x + 3 + h(x)$ avec $h(x) = \frac{1}{x}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



III Limites et ordre

Propriété (voir [démonstration 03](#))

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour $n \geq n_0$
Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$
- Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle $]a; +\infty[$
Si pour tout $x \in]a; +\infty[$ $f(x) \leq g(x)$, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$

Si des fonctions ou des suites sont dans un certain ordre, alors leurs limites sont dans le même ordre.

Attention

- La propriété n'est pas vraie avec des inégalités strictes.
Si $u_n < v_n$ ou si $f < g$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$, mais seulement $\ell \leq \ell'$.
Voir par exemple $f(x) = -\frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$; ou $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$
Pour ces deux fonctions et pour ces deux suites, on peut écrire des inégalités strictes, mais on ne peut pas espérer démontrer une inégalité stricte sur leurs limites puisqu'elles sont égales (à 0).
- La propriété permet de comparer deux limites, mais elle ne permet pas de démontrer l'existence de la limite d'une suite ou d'une fonction.

Remarque

Pour des fonctions la propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers $-\infty$, vers x_0 , à des limites à gauche ou à droite. (il suffira de modifier l'intervalle de définition des fonctions)

Propriété correspondante quand x tend vers $-\infty$:

- Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle $]-\infty; a[$
Si pour tout $x \in]-\infty; a[$ $f(x) \leq g(x)$, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$

Propriété (voir [démonstration 04](#))

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour $n \geq n_0$
Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$
si pour tout $x \in]a; +\infty[$ $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Si une suite (ou une fonction) tend vers $+\infty$ alors toute suite (toute fonction) qui lui est supérieure tend aussi vers $+\infty$

Remarque

Pour des fonctions, cette propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers $-\infty$, vers x_0 , à des limites à gauche ou à droite. (il suffira de modifier l'intervalle de définition des fonctions)

Propriété correspondante quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures :

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]x_0; x_0 + r[$ avec $r > 0$
si pour tout $x \in]x_0; x_0 + r[$ $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Soit $f(x) = 1 + x + \sin x$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Propriété admise

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour $n \geq n_0$

Si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$

si pour tout $x \in]a; +\infty[$ $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Si une suite (ou une fonction) tend vers $-\infty$ alors toute suite (toute fonction) qui lui est inférieure tend aussi vers $-\infty$

Remarque

Pour des fonctions, cette propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers $-\infty$, vers x_0 , à des limites à gauche ou à droite. (il suffira de modifier l'intervalle de définition des fonctions)

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

1°) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$.

Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur.

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en 0 ? Démontrer le résultat conjecturé.

2°) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + 5 + \cos \frac{1}{x}$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.

Vérifier en représentant graphiquement g avec une calculatrice ou un ordinateur.

Propriété (théorème des gendarmes) (voir [démonstration 05](#))

- Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies pour $n \geq n_0$

Si pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

- Soient trois fonctions f , g et h définies sur un intervalle $]a; +\infty[$

Si pour tout $x \in]a; +\infty[$ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Remarque

Pour des fonctions, cette propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers $-\infty$, vers x_0 , à des limites à gauche ou à droite. (il faudra modifier l'intervalle de définition des fonctions)

La propriété peut aussi s'étendre à une limite ℓ infinie, mais la double inégalité est alors inutile et on retrouve les propriétés vues précédemment.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{\cos n + \sin n}{n}$ peut être encadrée par les deux suites

(v_n) et (w_n) définies par $v_n = -\frac{2}{n}$ et $w_n = \frac{2}{n}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Propriété (voir [démonstration 06](#))

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour $n \geq n_0$ et soit ℓ un réel.

Si pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

- Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$

si pour tout $x \in]a; +\infty[$ $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque

Pour des fonctions, cette propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers $-\infty$, vers x_0 , à des limites à gauche ou à droite. (il faudra modifier l'intervalle de définition des fonctions)

IV Opérations sur les limites

Les tableaux suivants permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme, du produit, du quotient de deux suites (u_n) et (v_n) ou de deux fonctions f et g , lorsqu'on connaît la limite des deux suites ou la limite des deux fonctions.

La plupart des résultats se comprennent de façon intuitive. Ils peuvent tous être démontrés en utilisant les définitions données précédemment. ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Dans le cas de deux fonctions, les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en x_0 , des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de la même nature.

(Il n'est, par exemple, pas question d'utiliser le tableau avec la limite de f en $+\infty$ et la limite de g en 0)

Limite d'une somme

Si (u_n) ou f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) ou g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(u_n) + (v_n)$ ou $f + g$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

Limite d'un produit

Si (u_n) ou f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si (v_n) ou g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $(u_n \times v_n)$ ou $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Limite d'un inverse

Si (u_n) ou f a pour limite	$\ell \neq 0$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ ou $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient :

Limite d'un quotient

Si (u_n) ou f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si (v_n) ou g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ou $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Remarque

Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de «forme indéterminée».

Les formes indéterminées sont de 4 types exprimés sous forme abrégée par : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

Ces notations, incorrectes, sont à proscrire dans un devoir rédigé.

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

À partir des tableaux précédents, et en signalant la propriété utilisée, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + x ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1) ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x-3}{x^2-1} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}{n + \sqrt{n}} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x+5}{x^2-x-2} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}}$$

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

1°) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2$ se présente sous une forme indéterminée.

En factorisant x^3 dans l'expression $x^3 - x^2$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2$.

2°) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + x}$ se présente sous une forme indéterminée.

En factorisant x^3 dans l'expression $x^3 + x$, et en factorisant x^2 dans l'expression $x^2 + x$, déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + x}$.

3°) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ se présente sous une forme indéterminée.

En factorisant le numérateur et le dénominateur, déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$.

4°) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ se présente sous une forme indéterminée.

En multipliant le numérateur et le dénominateur de l'expression par $\sqrt{x^2 + 1} + 1$ déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$.

Remarque

Dans un cas de forme indéterminée, il sera nécessaire, pour trouver la limite cherchée, de procéder à des calculs supplémentaires ou d'utiliser des propriétés connues. On retiendra les principes suivants.

$+\infty - \infty$: Factorisation du terme "dominant" $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2$

$\frac{\infty}{\infty}$: Factorisation du terme "dominant" au numérateur et au dénominateur puis simplification $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$

$\frac{0}{0}$: Factorisation d'un terme tendant vers 0 au numérateur et au dénominateur, puis simplification $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

La forme indéterminée $0 \times \infty$ peut en général se ramener à l'une des formes $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Lorsque des racines carrées interviennent et que les méthodes ci-dessus ne donnent pas de résultat, on pourra multiplier par la quantité "conjugée" $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 + 1$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2x - 3}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 + \frac{1}{x}}{x^3 + 3x}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

Règles opératoires

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Remarque

Le résultat peut se démontrer par factorisation comme cela a été fait dans les exemples et les exercices précédents.

Attention : ce résultat est valable uniquement pour une limite en $+\infty$ ou $-\infty$. Il ne faut pas l'utiliser pour une limite en 0 ou en a .

Ce résultat peut aussi être appliqué pour les suites.

Exemple

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 - 3x^2 + 1$, on pourra écrire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 - 3x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{-2x + 3}$, on pourra écrire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{-2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{2}x = +\infty$

Pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}$, on pourra écrire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Attention : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donne un résultat juste mais **non justifié** puisque la fonction $x \mapsto \frac{x + \sin x}{x^2 + 1}$ n'est pas une fonction rationnelle.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes. On pourra éventuellement utiliser les règles opératoires.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x}{x - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + 1)(x - 3)}{3x^3 + 1}$$

Propriété (voir [démonstration 07](#))

Soit q un nombre réel, on considère la suite (q^n)

Si $q > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Si $q = 1$, on a $q^n = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

Si $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Remarque

Le résultat précédent pourra être utilisé dans le cas d'une suite (u_n) géométrique de raison q , puisqu'on sait que dans un tel cas on a : $u_n = u_0 \times q^n$

La limite d'une suite (u_n) arithmétique de raison r , se détermine de façon immédiate puisqu'on sait que dans un tel cas on a : $u_n = u_0 + n r$

Exemple

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \cos \frac{n\pi}{2n+1}$ et on s'intéresse à la limite de cette suite.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n\pi}{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

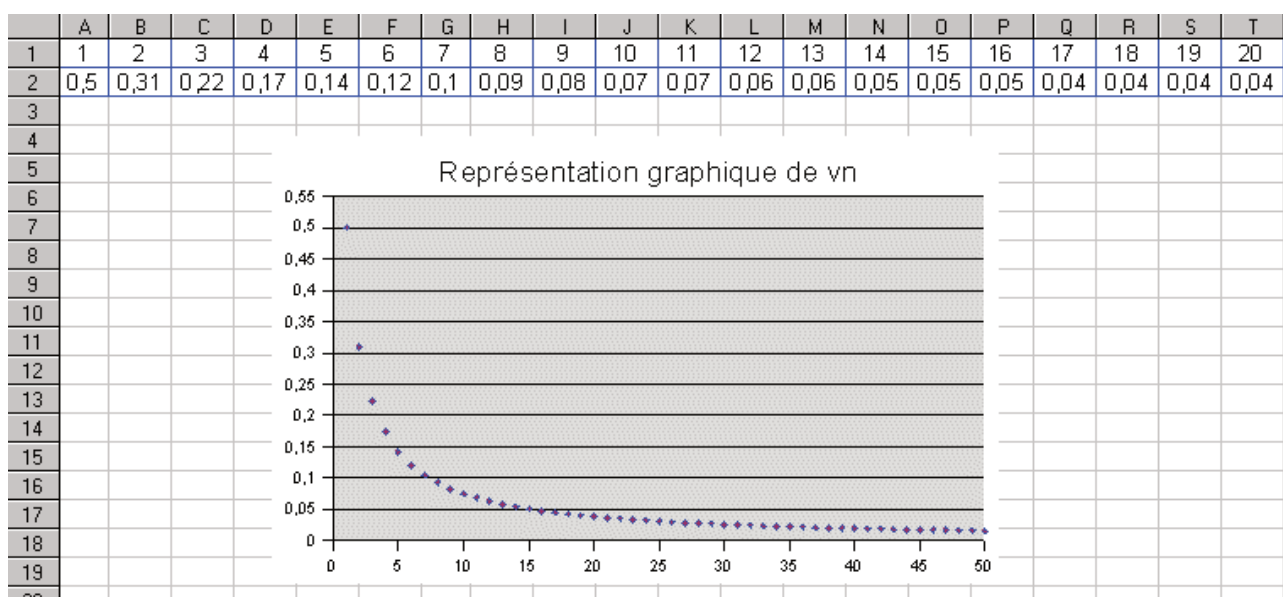
On peut écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{n\pi}{n(2 + \frac{1}{n})} = \frac{\pi}{2 + \frac{1}{n}}$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient alors par somme puis par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$

D'autre part on sait que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

On peut alors penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{n\pi}{2n+1} = 0$

En utilisant une calculatrice ou un tableur, on peut calculer de nombreux termes de la suite (v_n) et la représenter graphiquement.



Il semble là encore que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Propriété admise

a, b et ℓ désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \ell$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$

Remarque

- La fonction qui, à x , fait correspondre $g(f(x))$ est appelée fonction composée de f suivie de g . Elle est notée $g \circ f$. Ainsi on a $g \circ f(x) = g(f(x))$
- Si f et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, la fonction $g \circ f$ est en général différente de la fonction $f \circ g$. Par exemple avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2 - 3x$ on a :
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2 - 3x^2$ et $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2 - 3x) = (2 - 3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2$

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

V Convergence des suites monotones

Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) Calculer $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5$

Placer les points correspondants sur une droite graduée.

2°) Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

3°) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

4°) Que peut-on conjecturer pour la limite de (u_n) ?

Propriété admise

Une suite croissante majorée est convergente.

Une suite décroissante minorée est convergente.

Remarque

La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.

D'après les propriétés vues sur les limites, si une suite est majorée par K , sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à K .

Propriété (voir [démonstration 08](#))

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$

Une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$

Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang

On peut citer comme exemple la suite $u_n = [(-1)^n + 1]n$

Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1°) Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de $u_1 ; u_2 ; \dots ; u_{10}$

2°) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 3$

3°) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.

4°) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Remarque

Lorsqu'une suite définie par récurrence est convergente, la relation de récurrence permet de déterminer une relation vérifiée par la limite.

Exemple

Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 5$ est convergente, alors sa limite ℓ vérifie la relation $\ell = 3\ell + 5$ c'est-à-dire $\ell = -\frac{5}{2}$.

Attention : Cette relation ne permet en aucun cas d'affirmer que cette suite est convergente.

On pourrait vérifier dans ce cas que si $u_0 = -\frac{5}{2}$, la suite est convergente (c'est une suite constante)

et si $u_0 \neq -\frac{5}{2}$ la suite n'est pas convergente (elle a pour limite $+\infty$)

VI Suites adjacentes

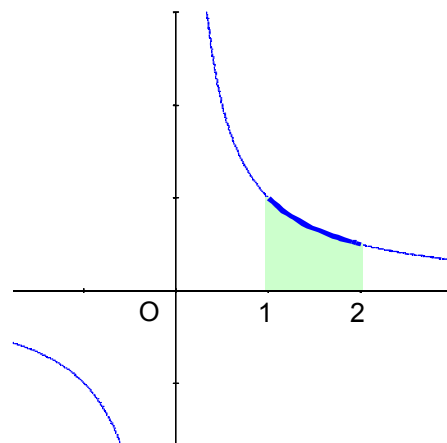
Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

Partie préliminaire.

On considère la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction inverse

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \in [1; 2]$$

On voudrait trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre ($\mathcal{C}$), l'axe Ox et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

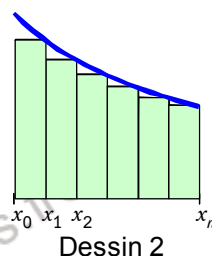
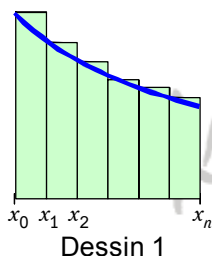


On découpe l'intervalle $[1; 2]$ en n intervalles de même amplitude

Donner les valeurs $x_0; x_1; \dots; x_n$ des bornes des intervalles.

Déterminer les valeurs de $f(x_0); f(x_1); \dots; f(x_n)$

En considérant les aires des n rectangles dont l'un des sommets est sur la courbe ($\mathcal{C}$) déduire en fonction de n l'expression de l'aire coloriée sur chacun des dessins ci-dessous.



On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$

et la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$

1°) Déterminer $u_1; u_2; u_3; u_4; v_1; v_2; v_3; v_4$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

Représenter les points correspondants sur une droite.

2°) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3°) Calculer $v_n - u_n$ et démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

4°) Quelle conjecture peut-on faire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

5°) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50} et v_{50} puis de u_{1000} et v_{1000}

Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque :

(u_n) est une suite croissante, (v_n) est une suite décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$

Propriété (voir [démonstration 09](#))

Si (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Exercice 18 (voir [réponses et correction](#))

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) Donner les valeurs de u_0 ; v_0 ; u_1 ; v_1 ; u_2 ; v_2 ; u_3 ; v_3 ; u_4 ; v_4

2°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3°) Quelle est leur limite ?

4°) Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est 0,9999..... (avec une infinité de 9)

Exercice 19 (voir [réponses et correction](#))

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

et la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

1°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit ℓ leur limite.

2°) Donner un entier n_0 pour lequel l'encadrement de ℓ par u_{n_0} et v_{n_0} est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} .

En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, donner une valeur approchée de u_{n_0} et v_{n_0}

3°) Est-il possible que ℓ soit égale à $\frac{\pi^2}{6}$?

Exercice 20 (voir [réponses et correction](#))

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \frac{3x + 1}{4}$ et $y = x$.

Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1 ; A_2 ; A_3 d'abscisses respectives u_1 ; u_2 ; u_3 ainsi que les points B_1 ; B_2 ; B_3 d'abscisses respectives v_1 ; v_2 ; v_3 .

2°) Calculer u_1 ; v_1 ; u_2 ; v_2 ; u_3 ; v_3

3°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et donner leur limite.