

Géométrie dans le plan et dans l'espace

I Vecteurs dans l'espace

Propriétés (admises)

Les propriétés vues pour les vecteurs du plan (addition, multiplication par un réel, relation de Chasles...) restent valables pour les vecteurs de l'espace.

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

On considère un tétraèdre ABCD.

On appelle I, J, K et L les points définis respectivement par :

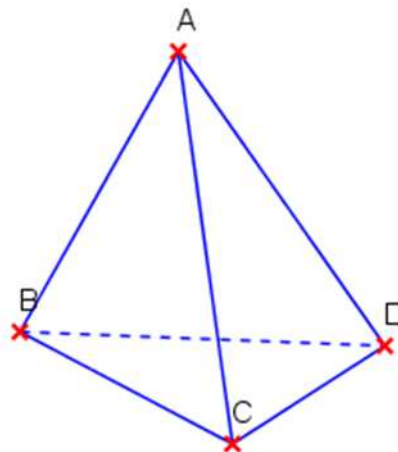
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CD} \quad ; \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}.$$

1°) Placer I, J, K et L sur le dessin.

2°) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3°) Justifier que les points I, J, K et L sont coplanaires et que la droite (AC) est parallèle au plan (IJKL).

4°) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJKL).



Propriétés (rappel)

Si O, I et J sont trois points non alignés du plan et si $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors le triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ constitue un repère du plan.

- Pour tout point M du plan il existe un unique couple de réels $(x; y)$

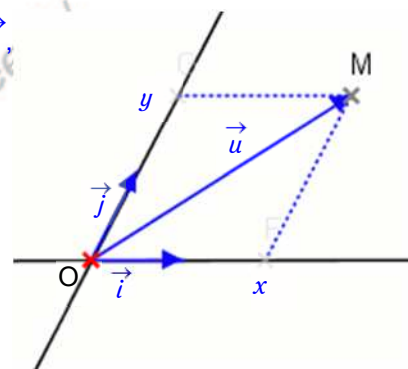
$$\text{tel que } \overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$(x; y)$ est le couple des coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan il existe un unique couple de réels $(x; y)$

$$\text{tel que } \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$(x; y)$ est le couple des coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Propriétés (admises)

Si O, I, J et K sont quatre points non coplanaires de l'espace et

si $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, alors le quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitue un repère de l'espace.

- Pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$

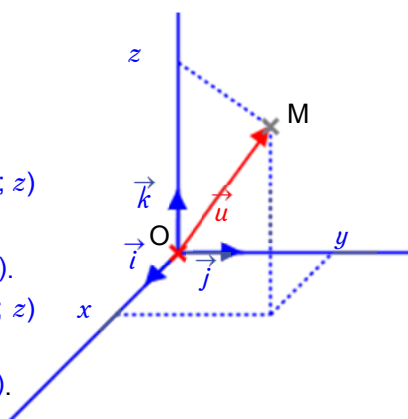
$$\text{tel que } \overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$(x; y; z)$ est le triplet des coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$

$$\text{tel que } \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$(x; y; z)$ est le triplet des coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Remarques

- x est appelée l'abscisse, y est appelé l'ordonnée et, dans l'espace, z est appelée la cote.
- Deux points sont confondus si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.
- Lorsque les axes du repère ((OI) et (OJ) dans le plan ; (OI), (OJ) et (OK) dans l'espace) sont des droites deux à deux perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
- Si le repère est orthogonal et si, de plus, les vecteurs du repère ($\vec{i}; \vec{j}$ dans le plan et $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ dans l'espace) ont pour norme 1, on dit que le repère est orthonormal (ou orthonormé).

Rappel

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe deux réels α et β non tous deux nuls tels que :
 $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$

Remarques

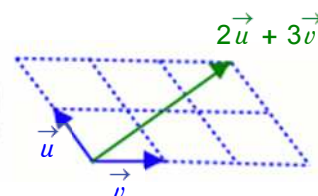
- Si $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$ avec $\alpha \neq 0$, alors on peut exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\vec{v}$.
Comme au moins l'un des coefficients α ou β est non nul, dire que deux vecteurs sont colinéaires revient à dire que l'on peut exprimer l'un des vecteurs en fonction de l'autre.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan sont colinéaires si et seulement si les couples $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si $xy' - yx' = 0$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace sont colinéaires si et seulement si les triplets $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont proportionnels.
(La proportionnalité des deux triplets ne peut pas se traduire par une égalité unique)
- Si des points sont alignés, 2 vecteurs obtenus à partir de ces points sont nécessairement colinéaires.
(La réciproque est fausse)

Définition

On dit que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α , β et γ non tous trois nuls tels que : $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$

Remarques

- Si $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$ avec $\alpha \neq 0$, alors on peut exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Comme au moins l'un des coefficients α , β , γ est non nul, dire que trois vecteurs sont coplanaires revient à dire que l'on peut exprimer l'un des vecteurs en fonction des deux autres.
Par exemple les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $2\vec{u} + 3\vec{v}$ sont coplanaires.
- Si des points sont dans un même plan, 3 vecteurs obtenus à partir de ces points sont nécessairement coplanaires. (La réciproque est fausse)
- Les trois vecteurs d'un repère de l'espace ne sont pas coplanaires.

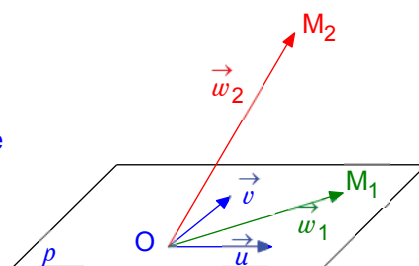


Propriété (voir démonstration 01)

On considère un vecteur $\vec{w}$ et un plan p ayant pour repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si le point M se trouve dans le plan p .



Exemple

Sur le dessin ci-contre :

le point M_1 se trouve dans le plan p , les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}_1$ sont coplanaires ;

le point M_2 ne se trouve pas dans le plan p , les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}_2$ ne sont pas coplanaires

Exercice 02 (voir réponses et correction)

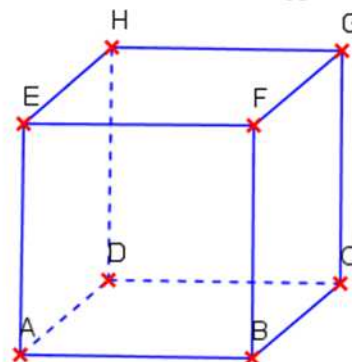
On considère un cube ABCDEFGH.

Les vecteurs $\vec{AB}$; $\vec{AD}$; $\vec{AE}$ sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs $\vec{AB}$; $\vec{AD}$; $\vec{AC}$ sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs $\vec{AB}$; $\vec{AD}$; $\vec{FH}$ sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs $\vec{FD}$; $\vec{AG}$; $\vec{EH}$ sont-ils coplanaires ?



II Produit scalaire dans le plan et dans l'espace

Définition (rappel)

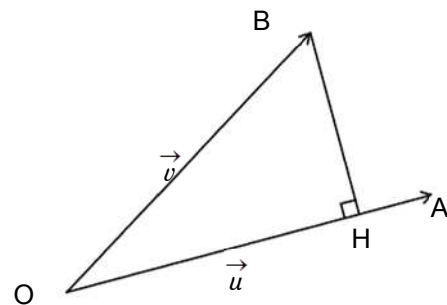
Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, soient O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).

Le produit $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On l'appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, on le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Remarque

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{u}$ est aussi noté $\vec{u}^2$, c'est-à-dire que l'on écrit : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$

Propriété (rappel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls du plan, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Propriété (rappel)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont orthogonaux, si et seulement si leur produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul.

Propriétés (rappel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}; \vec{u}'; \vec{v}$ du plan et tout réel k , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} ; \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) ; \quad (\vec{u} + \vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 ; \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Propriétés (rappel)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, on a :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1 ; \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\|^2 = 1 ; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont les vecteurs de coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' ; \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

1°) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. démontrer l'égalité : $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2$

2°) En déduire que dans un parallélogramme la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales.

3°) Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC].

Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$ (théorème de la médiane)

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Soit un triangle ABC rectangle en A. On désigne par A' le milieu de [BC], par H le pied de la hauteur issue de A et par I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC).

Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

Démontrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

Définition

Dans l'espace, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Remarque

Du fait de sa définition, le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace correspond au produit scalaire de ces deux vecteurs dans tout plan qui les contient. On pourra donc utiliser pour le produit scalaire dans l'espace les propriétés démontrées pour le produit scalaire dans le plan.

Propriétés (admisses)

Pour tous vecteurs $\vec{u}; \vec{u}'; \vec{v}$ de l'espace et tout réel k , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} ; (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) ; (\vec{u} + \vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v} ; \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de l'espace sont orthogonaux, si et seulement si leur produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ est nul.
Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Propriétés (voir démonstration 02)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exercice 05 (voir réponses et correction)

On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1°) a) Donner, sans justifier, les coordonnées de A, F, C et H.

Calculer le produit scalaire $\vec{AF} \cdot \vec{CH}$.

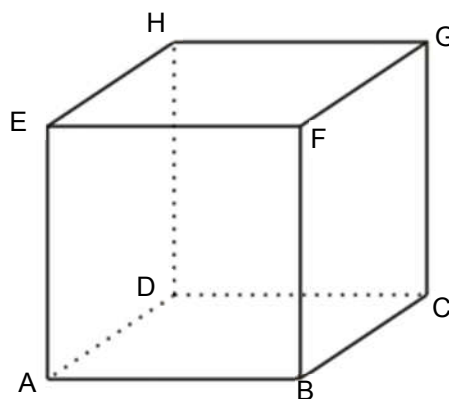
Les droites (AF) et (CH) sont-elles orthogonales ?

b) En remarquant que $\vec{CH} = \vec{BE}$, retrouver le résultat précédent.

2°) a) Calculer le produit scalaire $\vec{EC} \cdot \vec{FD}$.

Les droites (EC) et (FD) sont-elles orthogonales ?

b) En remarquant que $\vec{EF} = \vec{DC}$ retrouver le résultat précédent.



Exercice 06 (voir réponses et correction)

Le tétraèdre ABCD ci-contre est un tétraèdre régulier.

On pose $AB = BC = CD = AC = a$.

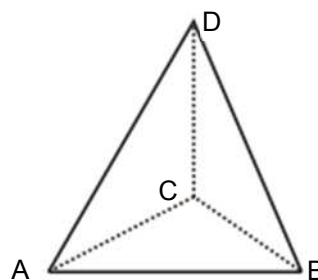
Soit G l'isobarycentre des points B, C, D.

Calculer en fonction de a les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$; $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$; $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$.

Justifier que (AD) est orthogonale à (BC).

Déduire des calculs précédents le produit scalaire $\vec{AG} \cdot \vec{BC}$.

Calculer $\vec{AG} \cdot \vec{BD}$. Que peut-on en conclure ?



Exercice 07 (voir réponses et correction)

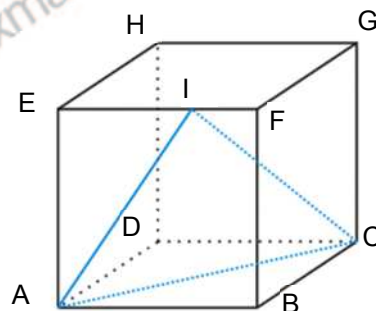
On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Soit I le barycentre de $(E; k)$ et $(F; 1 - k)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les trois points A, I et C forment un triangle rectangle.

Faire un dessin.



III Géométrie dans le plan

Propriétés (rappel)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

- Si A et B sont les points de coordonnées $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$, $d(A, B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon R a pour équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont des équations de cercle et donner alors le centre et le rayon :

$$2x^2 + 2y^2 - 5 = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 + y - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 5 = 0$$

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer l'équation du cercle de centre $I(2; 3)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(5; 1)$ et $B(2; -3)$.

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

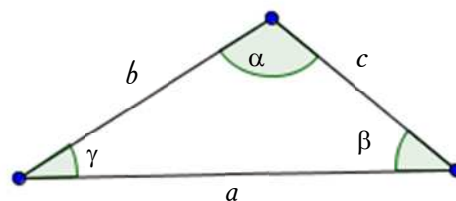
On note a , b et c les côtés d'un triangle ; α , β et γ les angles correspondants et S l'aire du triangle.

On admet les relations suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{Relation d'Al Kashi})$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (\text{Relation des sinus})$$



1°) ABC est un triangle tel que $AB = 4$; $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 62^\circ$
Déterminer BC.

2°) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal les points A, B et C de coordonnées respectives $(1; 2)$; $(3; 4)$; $(4; 0)$
Déterminer des valeurs approchées des angles du triangle ABC. Calculer l'aire S de ce triangle.

3°) On considère un triangle ABC tel que :

$$AB = 1 \quad ; \quad \widehat{BAC} = 15^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} = 30^\circ .$$

Soit H le pied de la hauteur issue de C. Déterminer CH.

Propriétés (rappel)

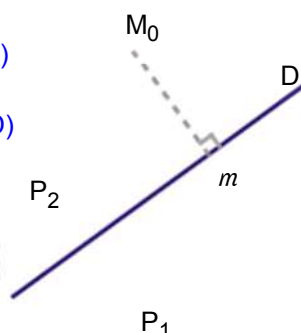
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, toute droite D a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ appelée équation cartésienne.

Le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur orthogonal à la droite D (vecteur normal à D)

Le vecteur $\vec{u}(b; -a)$ est un vecteur directeur de D.

La droite D partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2 caractérisés par les inéquations :

$$ax + by + c \geq 0 \quad \text{et} \quad ax + by + c \leq 0$$



Définition

On appelle projection orthogonale sur la droite D l'application qui, à un point M_0 du plan, associe le point m , intersection de D et de la droite passant par M_0 et perpendiculaire à D.

La distance M_0m est appelée distance de M_0 à la droite D.

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

Le plan rapporté à un repère orthonormal. On admet que, la distance du point $M_0(x_0 ; y_0)$ à la droite D d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ est donnée par : $d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

On considère la droite D d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$ et A le point de coordonnées (3 ; -5).

1°) Faire un dessin. Déterminer, en utilisant la relation admise, la distance du point A à la droite D.

2°) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur D. Retrouver le résultat précédent en calculant AH.

3°) Placer sur le dessin les points B(1 ; 1) et C(7 ; 5). Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On admet que, la distance du point $M_0(x_0 ; y_0)$ à la droite D d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ est donnée par : $d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

On considère les points A(1 ; 1) ; B(1 ; 5) et C(5 ; 4).

Déterminer une équation cartésienne de (AB) et une équation cartésienne de (AC).

Déterminer et tracer l'ensemble des points $M(x ; y)$ équidistants des droites (AB) et (AC).

À quoi correspond cet ensemble ?

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(1 ; 2)$ passant par A(2 ; -1).

Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point A.

IV Géométrie dans l'espace - Caractérisation de droites et de plans

Propriétés (voir [démonstration 03](#))

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

- Si A et B sont les points de coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$, $(x_B ; y_B ; z_B)$,

$$d(A, B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- La sphère de centre $\Omega(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon R a pour équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

1°) Déterminer le centre et le rayon de la sphère S d'équation : $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - z = \frac{11}{4}$

2°) Déterminer l'équation de la sphère S' de diamètre [AB] avec A(2 ; 2 ; 0) et B(-1 ; 5 ; 1).

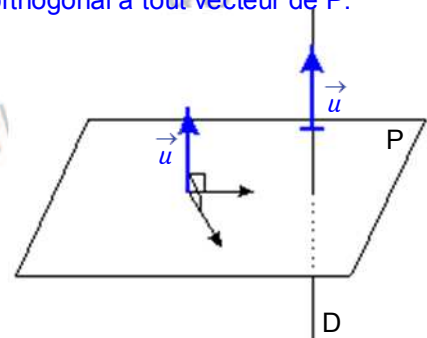
3°) Soit C le point de coordonnées (2 ; 4 ; 2). C appartient-il à S ? C appartient-il à S' ?

Définition

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal (ou orthogonal) à un plan P si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de P.

Propriétés (admises)

- Pour qu'un vecteur $\vec{n}$ soit normal à un plan P, il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.
- Tous les vecteurs normaux à P sont colinéaires entre eux.
- Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale (perpendiculaire) à P si et seulement si $\vec{u}$ est normal à P.
- Pour qu'une droite soit orthogonale (perpendiculaire) à un plan P, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



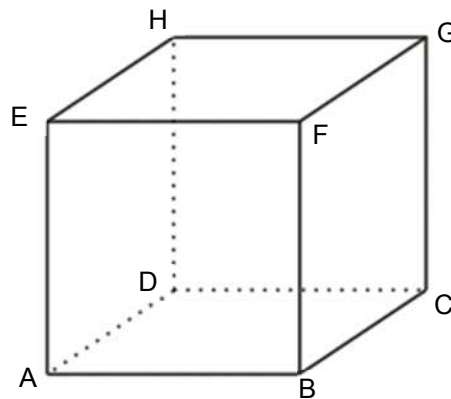
Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

On considère un cube ABCDEFGH.

Justifier que $\overrightarrow{AE}$ est normal au plan ABCD.

En déduire la valeur de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan HDBF.

**Propriété** (voir [démonstration 04](#))

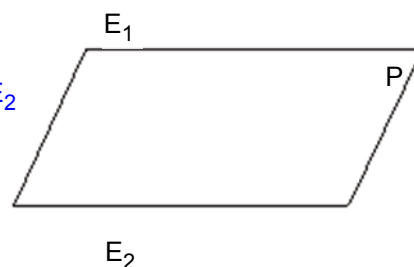
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

- Tout plan P a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.
 $\vec{n}(a; b; c)$ est alors un vecteur normal à P.
- Réciproquement l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est un plan qui a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Propriété (admise)

Un plan P partage l'espace en deux demi-espaces E_1 et E_2 caractérisés par les inéquations :

$$ax + by + cz + d \geq 0 \quad \text{et} \quad ax + by + cz + d \leq 0$$

**Exercice 16** (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3; 1; 2)$; $B(1; -1; 1)$ et $C(5; 2; 3)$.

Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Déterminer une équation du plan (ABC).

Propriété (voir [démonstration 05](#))

Soit D la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

$$M(x; y; z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Le système ci-dessus est appelé système d'équations paramétriques de la droite D.

Réciproquement, un tel système avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ définit une droite.

Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite passant par $A(2; 3; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 0; 1)$.

2°) On considère $C(2; 3; 0)$ et $D(-1; 1; 5)$.

Donner un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

3°) Soit P le plan d'équation $3x - z + 1 = 0$.

Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par O et perpendiculaire au plan P.

Rappels

- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c'est-à-dire lorsque $\vec{v} = k \vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.
- Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux c'est-à-dire lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Deux droites dans l'espace peuvent être orthogonales sans être sécantes.

Exercice 18 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°) Soit D la droite d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donner un point et un vecteur directeur de D.

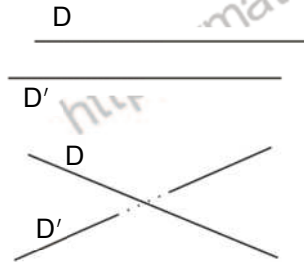
2°) Soit D' la droite d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que D et D' sont orthogonales. Sont-elles sécantes ?

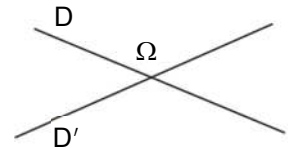
Propriété (rappel)

L'intersection de deux droites D et D' de l'espace peut être :

- l'ensemble vide,
Les droites sont
parallèles ou
non coplanaires



- un point unique,
Les droites sont
coplanaires et
non parallèles



- une droite
Les droites sont
confondues

**Remarque**

On pourra déterminer cette intersection en utilisant des systèmes d'équations paramétriques des droites.

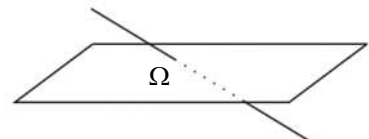
Propriété (rappel)

L'intersection d'une droite D et d'un plan P dans l'espace peut être :

- l'ensemble vide
La droite est
strictement
parallèle au plan



- un point unique
La droite est
sécante au plan



- la droite D tout entière
La droite est
contenue dans
le plan

**Remarque**

On pourra déterminer cette intersection en utilisant un système d'équations paramétriques de la droite et une équation cartésienne du plan.

Exercice 19 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - 3k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Soit P le plan d'équation $2x + y - z - 3 = 0$.

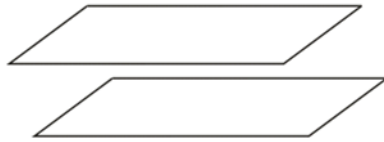
Soit P' le plan d'équation $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Déterminer l'intersection de D et de P et l'intersection de D et de P'.

Propriété (rappel)

L'intersection de deux plans dans l'espace peut être :

- l'ensemble vide
Les plans sont strictement parallèles



- une droite D
Les plans sont sécants



- un plan
Les plans sont confondus



Remarques

- On pourra déterminer cette intersection en utilisant des équations cartésiennes des deux plans.
- Deux plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ sont proportionnels.
- Une droite pourra être définie par intersection de deux plans, c'est-à-dire par un système de deux équations cartésiennes : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ avec $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ non proportionnels.

Exercice 20 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient P et P' les plans d'équations respectives $2x + y - z - 3 = 0$ et $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Montrer que l'intersection de P et P' est une droite dont on donnera un système d'équations paramétriques.

Propriété (rappel)

L'intersection de trois plans peut être : l'ensemble vide, un point, une droite ou un plan.

Remarque

On pourra déterminer cette intersection en utilisant des équations cartésiennes des plans.

Exercice 21 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer l'intersection des trois plans d'équations respectives :

$$x + y - 2z - 5 = 0 \quad ; \quad 2x + 3y + z = 0 \quad ; \quad x - y + z + 1 = 0$$

Exercice 22 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans chacun des cas déterminer l'intersection des trois plans d'équations respectives :

$$1^\circ) 2x + y - 3z - 1 = 0 \quad ; \quad 3x - 3y + 2z - 4 = 0 \quad ; \quad x + 5y - 8z + 2 = 0$$

$$2^\circ) -x + y + 3z = -1 \quad ; \quad 2x - 3y + z = 0 \quad ; \quad -7x + 10y - 2 = 0$$

Définition

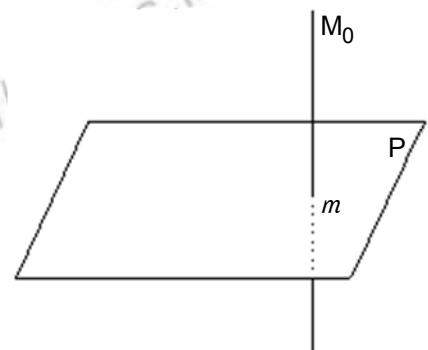
La projection orthogonale sur le plan P est l'application qui à un point M_0 associe le point m , intersection de P et de la droite passant par M_0 et perpendiculaire à P.

Propriété (admise)

La distance du point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ au plan P est la distance du point M_0 à son projeté orthogonal m .

$$\text{Elle s'exprime par : } d(M_0, P) = M_0m = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

lorsque le plan P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormal de l'espace.



Exercice 23 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit P le plan d'équation : $2x - 2y + z - 3 = 0$ et A le point de coordonnées $(1; 1; 2)$.

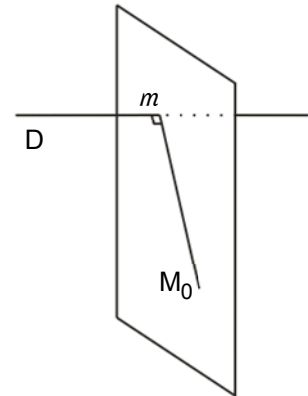
1°) Déterminer la distance d du point A au plan P.

2°) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur P.

Vérifier que $AH = d$.

Définition

La projection orthogonale sur la droite D est l'application qui, à un point M_0 , associe le point m , intersection de D et du plan passant par M_0 et perpendiculaire à D.



Exercice 24 (voir [réponses et correction](#))

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite ayant pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 - k \\ z = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

1°) Soit A de coordonnées $(-5; 0; 6)$.

Montrer que A appartient à D. Quel est le projeté orthogonal de A sur D ?

2°) Soit B de coordonnées $(2; -1; 0)$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur D.