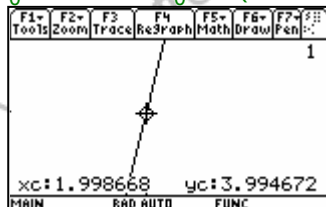
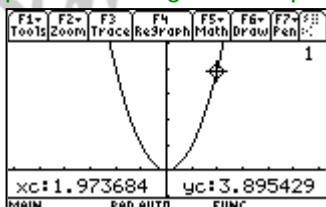


# DÉRIVÉE

## I Nombre dérivé - Tangente

### Exemple 1

Considérons la fonction carré  $f(x) = x^2$ , et effectuons avec une calculatrice un zoom de sa représentation graphique au voisinage de son point  $M_0$  d'abscisse  $x_0 = 2$  (et d'ordonnée  $y_0 = 4$ ).



On peut constater, si le grossissement est assez fort, que la courbe semble être rectiligne.

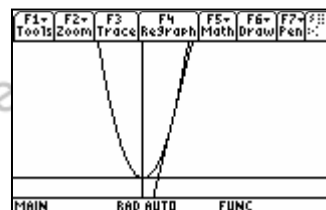
(Ce résultat sera d'ailleurs vrai en n'importe quel point)

Si on considère un point  $M$  sur la courbe, proche du point  $M_0$ , l'abscisse de  $M$  peut s'écrire sous la forme  $2 + h$  (avec  $h$  "petit") et l'ordonnée du point  $M$  est alors  $(2 + h)^2$

Le coefficient de la droite  $(M_0M)$  est :  $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{2 + h - 2} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$

On peut remarquer que lorsque  $h$  tend vers 0, ce coefficient directeur tend vers 4.

Si on superpose sur le graphique la droite passant par  $M_0$  et de coefficient directeur 4, c'est-à-dire la droite d'équation  $y = 4x - 4$ , on peut constater qu'elle est, au voisinage du point  $M_0$ , quasiment confondue avec la courbe.



En un point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$  quelconque, on obtiendrait un résultat similaire.

En effet pour un point  $M$  proche de  $x_0$ , notons  $x = x_0 + h$  l'abscisse de  $M$ .

Le coefficient de la droite  $(M_0M)$  est alors :  $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{x_0 + h - x_0} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h$

On peut remarquer que lorsque  $h$  tend vers 0, ce coefficient directeur tend vers  $2x_0$ .

La courbe sera quasiment confondue avec la droite passant par  $M_0$  et de coefficient directeur  $2x_0$ .

### Remarque

Dans le cas général de la représentation graphique d'une fonction  $f$ , le coefficient directeur de la droite  $(M_0M)$  sera

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ou encore } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

### Définition

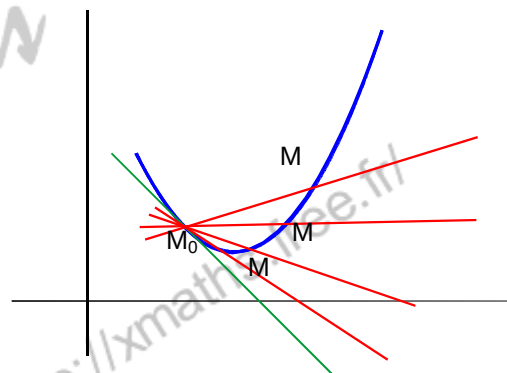
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , soit  $x_0$  un point de  $I$ .

Si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  existe et appartient à  $\mathbb{R}$ , on dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  sera noté  $f'(x_0)$  et appelé nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$ .

La courbe représentative de  $f$  a pour tangente en  $M_0(x_0; f(x_0))$  la droite  $T$  de coefficient directeur  $f'(x_0)$ .

$T$  a pour équation  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .



### Cas particulier

Si  $f'(x_0) = 0$ , T est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

### Remarque

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on peut écrire  $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + h \varepsilon(h)$   
 $\varepsilon$  étant une fonction de limite 0 en 0.

On dit que  $f(x_0) + f'(x_0) \times h$  est une approximation affine de  $f(x_0 + h)$ .

(On peut même démontrer que c'est la "meilleure" approximation affine de  $f(x_0 + h)$ )

### Propriété (voir démonstration 01)

Une fonction dérivable en  $x_0$  est continue en  $x_0$ . (La réciproque est fausse)

### Exercice 01 (voir réponses et correction)

Soit  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Étudier, en utilisant la définition, la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 3$ , puis en  $x_0 \in ]0; +\infty[$ .

Que peut-on dire de la dérivabilité de  $f$  en 0 ?

### Remarque

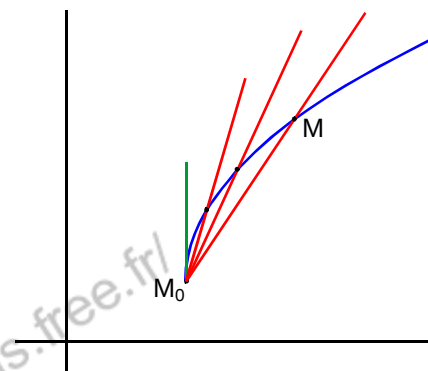
Si une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  et si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \text{ ou } -\infty,$$

alors  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ .

La courbe a au point d'abscisse  $x_0$  une tangente parallèle à l'axe des ordonnées (tangente verticale).

Cette tangente a pour équation  $x = x_0$ .



### Exercice 02 (voir réponses et correction)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$ .

On rappelle que si  $x \geq 0$ , on a  $f(x) = x$  et si  $x < 0$ ,  $f(x) = -x$ .

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$ . (On pourra envisager plusieurs cas)

### Remarque

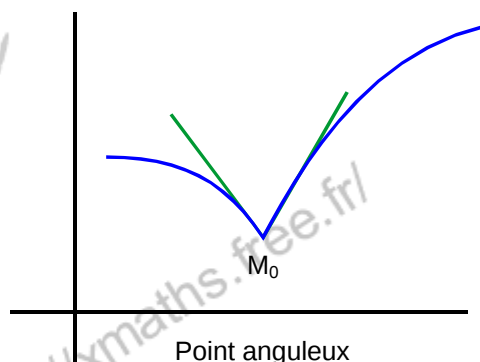
Si  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  a une limite finie à droite (ou à gauche)

quand  $h$  tend vers 0, alors on dit que  $f$  est dérivable à droite (ou à gauche) en  $x_0$ , et cette limite est le nombre dérivé à droite (ou à gauche) de  $f$  en  $x_0$ .

La courbe aura alors une demi-tangente à droite (ou à gauche) en  $x_0$  et cette demi-tangente aura pour coefficient directeur

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Lorsqu'une courbe présente une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche en  $x_0$  et que ces deux demi-tangentes n'ont pas le même coefficient directeur, on dit que la courbe présente un point anguleux en  $x_0$ .



### Exercice 03 (voir réponses et correction)

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x^2 - 1|$ .

Tracer sa représentation graphique en utilisant une calculatrice.

Vérifier en utilisant les fonctions de zoom, que cette courbe présente deux points anguleux. Justifier.

## II Fonction dérivée - Opérations

### Définition

Si une fonction  $f$  est dérivable en tout point  $x_0$  d'un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$ .  
L'application qui à tout  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé de  $f$  au point  $x$  est appelée fonction dérivée de  $f$ .  
La fonction dérivée de  $f$  est notée  $f'$ .

### Exemple 2

Considérons la fonction  $f$  (racine carrée), définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ . (Voir Exercice 1)  
 $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Pour tout  $x_0 \in ]0; +\infty[$ , le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  est  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ .

La fonction dérivée de la fonction racine carrée est donc la fonction  $f'$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

### Remarque

Si la fonction  $f'$  est elle-même dérivable sur  $I$ , la dérivée de  $f'$  sera notée  $f''$  ou  $f^{(2)}$ , on l'appelle dérivée seconde de  $f$ .  
On peut ainsi, par itérations, définir si elle existe la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  que l'on notera  $f^{(n)}$ .

### Remarque

Si  $f$  est dérivable en  $x$ , on peut écrire  $f(x+h) = f(x) + f'(x) \times h + h \varepsilon(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

c'est-à-dire  $f(x+h) - f(x) = f'(x) \times h + h \varepsilon(h)$

En prenant pour  $h$  un petit accroissement de  $x$ , noté  $\Delta x$ , et en notant  $\Delta y$  l'accroissement de  $f$  correspondant, on peut écrire  $\Delta y = f'(x) \Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$ . On a donc  $\Delta y \approx f'(x) \Delta x$

On utilisera alors parfois la notation différentielle :  $dy = f'(x) dx$  ou encore  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ .

### Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

On considère les fonctions  $f, g, h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x \qquad h(x) = x^2$$

En utilisant la définition, démontrer que ces fonctions sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et donner pour chacune d'elles sa fonction dérivée.

### Propriétés (rappels)

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

- $u + v$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(u + v)' = u' + v'$
- $uv$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(uv)' = u'v + uv'$
- si  $u$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{1}{u}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
- si  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{u}{v}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

### Cas particulier

Si  $k \in \mathbb{R}$ , la dérivée de  $ku$  est  $ku'$  et la dérivée de  $\frac{u}{k}$  est  $\frac{u'}{k}$ .

### Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Soit  $n$  un entier naturel. On considère la fonction  $x \mapsto x^n$

(On conviendra que la fonction  $x \mapsto x^0$  est la fonction constante  $x \mapsto 1$ )

Démontrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,  $x \mapsto x^n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $x \mapsto x^{-n}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sur  $]-\infty; 0[$  et  $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ .

## Dérivées des fonctions usuelles

On donne ci-dessous les dérivées de fonctions rencontrées couramment.

| Fonction                                           | Dérivée                       | Intervalle                                                                                                 |
|----------------------------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = k$                                         | $f'(x) = 0$                   | $\mathbb{R}$                                                                                               |
| $f(x) = x$                                         | $f'(x) = 1$                   | $\mathbb{R}$                                                                                               |
| $f(x) = ax + b$                                    | $f'(x) = a$                   | $\mathbb{R}$                                                                                               |
| $f(x) = x^2$                                       | $f'(x) = 2x$                  | $\mathbb{R}$                                                                                               |
| $f(x) = x^3$                                       | $f'(x) = 3x^2$                | $\mathbb{R}$                                                                                               |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                               | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$      | $] -\infty ; 0[ \text{ ou } ] 0 ; +\infty [$                                                               |
| $f(x) = \sqrt{x}$                                  | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $] 0 ; +\infty [$                                                                                          |
| $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0$ | $f'(x) = nx^{n-1}$            | $\mathbb{R} \quad \text{si } n > 0$<br>$] -\infty ; 0[ \text{ ou } ] 0 ; +\infty [ \quad \text{si } n < 0$ |
| $f(x) = \sin x$                                    | $f'(x) = \cos x$              | $\mathbb{R}$                                                                                               |
| $f(x) = \cos x$                                    | $f'(x) = -\sin x$             | $\mathbb{R}$                                                                                               |

### **Exercice 06** (voir [réponses et correction](#))

Calculer, en précisant l'intervalle considéré, les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5 & g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{5} & h(x) = 2 + \frac{1}{x} \\
 p(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{5}{3}x & q(x) = \frac{3}{2x} & r(x) = \frac{x + 1}{x - 3}
 \end{array}$$

### **Exercice 07** (voir [réponses et correction](#))

Calculer, en précisant l'intervalle considéré, les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \frac{\sin x}{x} & g(x) = \frac{1}{x^6} & h(x) = x\sqrt{x} \\
 p(x) = (x - 3)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & q(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} & r(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}
 \end{array}$$

### **Exercice 08** (voir [réponses et correction](#))

Calculer, en précisant l'intervalle considéré, les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} & g(x) = (x^3 + 3x)\sqrt{x} & h(x) = \frac{2 + \cos x}{2 + \sin x}
 \end{array}$$

### **Exercice 09** (voir [réponses et correction](#))

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ .

La courbe représentative de  $f$  a-t-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation  $y = -x + 1$  ?  
Si oui en quels points ?

### **Exercice 10** (voir [réponses et correction](#))

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer

$$\begin{array}{lll}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}
 \end{array}$$

### III Application aux variations d'une fonction

#### Théorème (rappel)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

Si  $f'$  est positive ou nulle sur  $I$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .

Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Si  $f'$  est négative ou nulle sur  $I$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

#### Propriété (voir [démonstration 02](#))

Si  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $]a; b[$  et si  $f$  est continue en  $a$  et en  $b$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $[a; b]$ .

#### *Remarque*

On peut utiliser une propriété similaire pour un intervalle  $]a; +\infty[$  ou  $]-\infty; a[$  en supposant  $f$  continue en  $a$ .  
On peut utiliser des propriétés similaires pour une fonction strictement décroissante.

#### *Exemple 3*

Considérons la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$ , définie sur  $[0; +\infty[$ .

On peut justifier en utilisant la propriété ci-dessus que  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

(résultat connu, déjà démontré en utilisant la définition d'une fonction strictement croissante)

On sait que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  donc  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$

On peut en déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

De plus, on sait que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$  et en particulier en 0.

On en déduit que  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

#### Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; 2[$  par  $f(x) = \frac{1+x}{x^2-2x}$

1°) Donner les limites de  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.

2°) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0; 2[$  et calculer sa dérivée  $f'$ .

3°) Étudier le signe de  $f'$  et donner le tableau de variations de  $f$ .

#### Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1°) Donner le tableau de variations de  $f$ .

2°) Représenter graphiquement  $f$ .

3°) Quel est le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

Donner une valeur approchée de chacune des solutions.

#### Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

$f$  est la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$

Donner le tableau de variations de  $f$ .

Tracer la courbe représentative de  $f$ , on étudiera en particulier la tangente à la courbe en son point d'abscisse 0.

## IV Dérivée d'une fonction composée

### Exemple 4

Considérons la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x^2 + 1$  et la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ . La fonction  $f$  est la composée de la fonction racine carrée que l'on notera  $r$  et de la fonction  $u$ .

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Étudions la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$  et pour cela calculons  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x_0^2 + 1}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x_0^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x_0^2 + 1})}{(x - x_0)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x_0^2 + 1})} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x_0^2 - 1}{(x - x_0)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x_0^2 + 1})} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x_0^2 + 1})} = \frac{x + x_0}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x_0^2 + 1}}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x_0^2 + 1} = 2\sqrt{x_0^2 + 1}$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 1}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}}$$

La fonction  $f$  est donc dérivable en tout point  $x_0$  de  $\mathbb{R}$ , le nombre dérivé en  $x_0$  étant  $f'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}}$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

On peut remarquer que  $f$  correspond à la racine carrée de  $u$  et que la fonction racine carrée a pour dérivée en  $u$  le nombre  $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ . En utilisant les approximations on peut alors noter que  $\Delta y \approx \frac{1}{2\sqrt{u}} \Delta u$

Mais la fonction  $u$  ayant pour dérivée en  $x$  le nombre  $u'(x) = 2x$ , on peut aussi écrire  $\Delta u \approx 2x \Delta x$

$$\text{On obtient alors} \quad \Delta y \approx \frac{1}{2\sqrt{u}} \Delta u \approx \frac{1}{2\sqrt{u}} 2x \Delta x \approx \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \Delta x \quad \text{donc} \quad \Delta y \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Delta x$$

En utilisant la notation différentielle, on peut écrire

$$dy = r'(u) du \quad \text{et} \quad du = u'(x) dx \quad \text{On obtient alors} \quad dy = r'(u) \times u'(x) dx$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 2x dx = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \text{donc} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

On retrouve ainsi le résultat démontré précédemment.

### Propriété (admise)

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , si  $v$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $J$ , et si pour tout  $x \in I$   $u(x) \in J$ , alors  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

### Remarque

La propriété peut être démontrée, le principe de la démonstration reposant sur la traduction en termes d'approximation affine de la dérivabilité d'une fonction :  $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + h \varepsilon(h)$

En combinant les approximations de  $v$  et de  $u$  qui sont des fonctions dérivables, on obtient une approximation de  $v \circ u$ .

### Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Calculer les dérivées de :

$$f(x) = \sin(x^2 + 1)$$

$$g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

### Propriétés (voir [démonstration 03](#))

- Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$  et soit  $I$  un intervalle tel que pour tout  $x$  de  $I$   $ax + b \in J$ . La fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(ax + b)$  est dérivable sur  $I$  et  $g'(x) = a f'(ax + b)$ .
- Si  $u$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$  alors :  
 $\sqrt{u}$  est une fonction dérivable sur  $I$  et on a  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .
- Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  alors :  
pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $u^n$  est une fonction dérivable sur  $I$  et on a  $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ .  
(si de plus  $u$  ne s'annule pas, le résultat ci-dessus peut être appliqué avec  $n$  entier relatif)

### Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

Pour chacune des fonctions ci-dessous on considère un intervalle  $I$  sur lequel la fonction est dérivable. Calculer alors la dérivée.

$$r(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

$$s(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$$

$$p(x) = (x^2 + x - 5)^8$$

$$q(x) = \cos(x^4 - x + 2)$$

### Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions  $r$ ,  $s$  et  $t$  :

$$r(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

$$s(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$$

$$t(x) = \sqrt{x^6 + x^4}$$

### Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $[0 ; 1[$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ .

1°) Dresser le tableau des variations de  $f$ .

2°) Soit  $\Gamma_1$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\Gamma_1$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$ .

Tracer la courbe  $\Gamma_1$  et la droite  $T$ .

3°) Sur le même graphique, tracer la courbe  $\Gamma_2$  image de  $\Gamma_1$  par la réflexion d'axe  $Ox$ .

4°) Soit  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Montrer que  $\Gamma$  a pour équation cartésienne  $x^3 + (x-1)y^2 = 0$   
 $\Gamma$  est appelée cissoïde de Dioclès.

#### Partie B

$I$  est le point de coordonnées  $(1 ; 0)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$C$  est le cercle de diamètre  $[OI]$  et  $\Delta$  est la tangente à  $C$  au point  $I$ .

Soit  $D$  la droite passant par  $O$  et de coefficient directeur  $t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

1°) Déterminer les coordonnées de  $M$ , point d'intersection de  $C$  et de  $D$ , distinct de  $O$ .

Déterminer les coordonnées de  $N$ , point d'intersection de  $\Delta$  et de  $D$ .

2°) Déterminer les coordonnées du point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$ .

Montrer que  $M'$  est un point de  $\Gamma$ .