

Exercice E8

Soient x et y des entiers relatifs non nuls.

$\text{PGCD}(x; y) = 18 \Leftrightarrow x = 18x'$ et $y = 18y'$ avec x' et y' entiers relatifs non nuls premiers entre eux.

$M(x; y)$ appartient alors à D si et seulement si :

$$5x - 3y = 198 \Leftrightarrow 5 \times 18x' - 3 \times 18y' = 198 \Leftrightarrow 5x' - 3y' = 11$$

Une solution particulière évidente de l'équation $5x' - 3y' = 11$ est $(1; -2)$.

- Supposons que $(x'; y')$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $5x' - 3y' = 11$.
On peut alors écrire : $5x' - 3y' = 11 \Leftrightarrow 5x' - 3y' = 5 \times 1 - 3 \times (-2) \Leftrightarrow 5(x' - 1) = 3(y' + 2)$
 x' étant un entier relatif, 5 divise $5(x' - 1)$, donc 5 divise $3(y' + 2)$.
Comme 5 est premier avec 3, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 5 divise $(y' + 2)$.
Donc $y' + 2 = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $y' = 5k - 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
En reportant cette expression dans l'égalité $5(x' - 1) = 3(y' + 2)$, on obtient :
 $5(x' - 1) = 3 \times 5k$, donc $x' - 1 = 3k$, donc $x' = 3k + 1$.
On a donc démontré que si $(x'; y')$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $5x' - 3y' = 11$, on a : $x' = 3k + 1$ et $y' = 5k - 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Supposons que $(x'; y')$ est un couple d'entiers relatifs de la forme $x' = 3k + 1$ et $y' = 5k - 2$, $k \in \mathbb{Z}$.
Alors : $5x' - 3y' = 5(3k + 1) - 3(5k - 2) = 15k + 5 - 15k + 6 = 11$.
Donc $(x'; y')$ est une solution de l'équation $5x' - 3y' = 11$.

L'ensemble des solutions de l'équation $5x' - 3y' = 11$ est donc $\{(x'; y') = (3k + 1; 5k - 2), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

On sait que $x = 18x'$ et $y = 18y'$ avec x' et y' entiers relatifs non nuls premiers entre eux.

Donc $x = 18(3k + 1)$ et $y = 18(5k - 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$; $3k + 1$ et $5k - 2$ étant premiers entre eux.

L'ensemble des points $M(x; y)$ appartenant à D et pour lesquels x et y sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{PGCD}(x; y) = 18$, est :

$\{M(18(3k + 1); 18(5k - 2)), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, 3k + 1 \text{ et } 5k - 2 \text{ étant premiers entre eux}\}$.

NB : on peut justifier que $3k + 1$ et $5k - 2$ sont premiers entre eux si $k + 4$ n'est pas divisible par 11.

Voir complément ci-dessous.

L'ensemble des points $M(x; y)$ appartenant à D et pour lesquels x et y sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{PGCD}(x; y) = 18$, est : $\{M(18(3k + 1); 18(5k - 2)), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, k + 4 \text{ n'étant pas divisible par } 11\}$.

Le point le plus proche de l'origine du repère est celui pour lequel la distance OM est la plus petite, c'est-à-dire aussi celui pour lequel OM^2 est minimal.

$$\text{On a : } OM^2 = [18(3k + 1)]^2 + [18(5k - 2)]^2 = 324(34k^2 - 14k + 5).$$

OM^2 est minimal lorsque $34k^2 - 14k + 5$ est minimal.

Considérons la fonction f définie par $f(x) = 34x^2 - 14x + 5$.

Cette fonction a pour dérivée : $f'(x) = 68x - 14$.

f a un minimum pour $x = \frac{14}{68} = \frac{7}{34}$ et on a $0 < \frac{7}{34} < 1$.

Pour $k = 0$, $OM^2 = 324 \times 5 = 1620$ et pour $k = 1$, $OM^2 = 324 \times 25 = 8100$.

De plus pour $k = 0$, $3k + 1 = 1$ et $5k - 2 = -2$ donc $3k + 1$ et $5k - 2$ sont premiers entre eux.

Le point le plus proche de l'origine du repère est donc celui obtenu pour $k = 0$.

On a alors $x = 18$ et $y = -36$.

Le point le plus proche de l'origine du repère est le point de coordonnées $(18; -36)$.

Les points qui se trouvent à l'intérieur du disque de centre $\Omega(60;60)$ et de rayon 200 sont les points pour lesquels $\Omega M^2 \leq 200^2$ c'est-à-dire $\Omega M^2 - 200^2 \leq 0$.

$$\text{On a : } \Omega M^2 - 200^2 = (54k + 18 - 60)^2 + (90k - 36 - 60)^2 - 200^2 = 4(2754k^2 - 5454k - 7255)$$

Le trinôme $2754k^2 - 5454k - 7255$ a deux racines :

$$k_1 = \frac{303 - \sqrt{338479}}{306} \text{ et } k_2 = \frac{303 + \sqrt{338479}}{306}. \text{ On a } k_1 \approx -0,91 \text{ et } k_2 \approx 2,89$$

Ce trinôme est négatif lorsque k est dans l'intervalle $[k_1; k_2]$.

Les points à l'intérieur du disque sont obtenus pour $k \in [k_1; k_2]$, c'est-à-dire $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$.

On peut remarquer que pour ces trois valeurs de k , on a $3k + 1$ et $5k - 2$ premiers entre eux.

Les points à l'intérieur du disque sont les points de coordonnées $(18; -36)$; $(72; 54)$ et $(126; 144)$.

Complément :

Soient a et b deux entiers relatifs.

On sait que si d divise a et b , alors d divise tout nombre de la forme $pa + qb$ avec p et q éléments de $\mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Si d est un diviseur commun à $3k + 1$ et $5k - 2$ alors d divise $5(3k + 1) - 3(5k - 2)$ donc d divise 11.

On en déduit que le PGCD de $3k + 1$ et $5k - 2$ ne peut être que 1 ou 11.

Si $\text{PGCD}(3k + 1 ; 5k - 2) = 11$

alors 11 divise $3k + 1$ et $5k - 2$ donc 11 divise $2(3k + 1) - (5k - 2)$ donc 11 divise $k + 4$.

Si 11 divise $k + 4$ alors 11 divise $3(k + 4)$ donc 11 divise $3(k + 4) - 11$ donc 11 divise $3k + 1$

et 11 divise $5(k + 4)$ donc 11 divise $5(k + 4) - 2 \times 11$ donc 11 divise $5k - 2$.

alors $\text{PGCD}(3k + 1 ; 5k - 2) = 11$.

$3k + 1$ et $5k - 2$ sont premiers entre eux si leur PGCD est différent de 11,

donc $3k + 1$ et $5k - 2$ sont premiers entre eux si $k + 4$ n'est pas divisible par 11, c'est-à-dire si $k + 4$ n'est pas de la forme $11q$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

Ou encore $3k + 1$ et $5k - 2$ sont premiers entre eux si k n'est pas de la forme $11q - 4$ avec $q \in \mathbb{Z}$.