

CONTINUITÉ

Définition

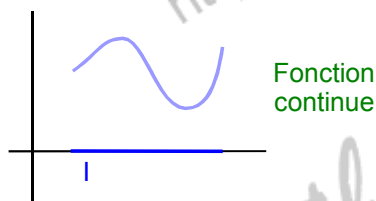
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Soit a un réel appartenant à I . On dit que f est continue en a , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur I , si f est continue en tout point a de I .

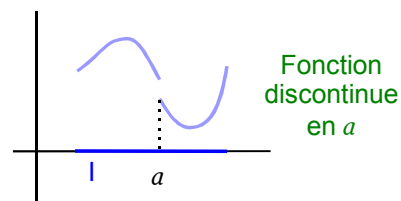
Remarque

- Dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ revient aussi à dire que $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$

Graphiquement, on reconnaît qu'une fonction f est continue sur I lorsqu'on peut tracer sa courbe sur l'intervalle I sans lever le stylo de la feuille.



Une fonction n'est pas continue en un point a lorsque la courbe a une discontinuité en a , elle fait un "saut".

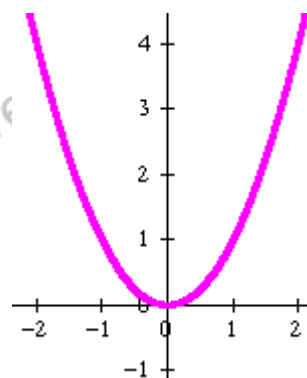


Exemple 1

- La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction continue en tout point a de $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$

On peut le justifier en démontrant que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x assez proche de a .

La parabole représentant la fonction $x \mapsto x^2$ peut être tracée sans lever le stylo de la feuille.



Exemple 2

- Considérons la fonction $x \mapsto E(x)$ appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Ainsi $E(2,5)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à 2,5, donc $E(2,5) = 2$

De même $E(-2,4) = -3$; $E(1,9999) = 1$ et $E(2) = 2$

Si n est un nombre entier, alors $E(n) = n$

et pour tout $x \in [n ; n + 1[$, on a $E(x) = n$

La représentation graphique de la fonction "Partie entière" est donnée ci-contre.

Cette fonction n'est pas continue en n avec $n \in \mathbb{Z}$

En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, $E(x)$ n'est pas très proche de $E(n)$.

On a vu par exemple que $E(1,9999) = 1$ et $E(2) = 2$

"Partie entière" est une fonction dite "en escalier".

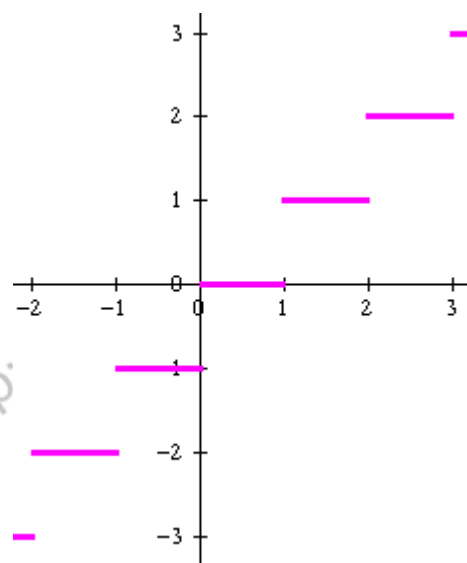
La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.

Avec une calculatrice TI89, $E(x)$ est noté $\text{int}(x)$ ou $\text{floor}(x)$, en français $\text{partEnt}(x)$

Avec une calculatrice TI82, $E(x)$ est noté $\text{int } x$

Le tracé doit être fait en mode point (dot), sinon apparaîtront des lignes verticales qui ne font pas partie de la représentation graphique.

Avec un tableur la fonction "Partie entière" est notée $\text{ent}()$



Propriété (admise)

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Remarques

La démonstration de cette propriété se fait en utilisant les propriétés des limites.

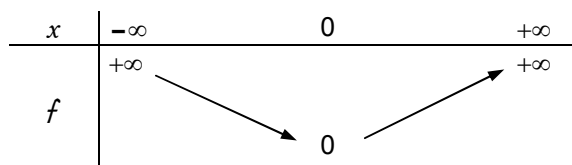
La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues.

Convention

Il est convenu que, dans un tableau de variation de fonction, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

Exemple 3

Le tableau de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) signifie que la fonction carré est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et qu'elle est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.



Théorème des valeurs intermédiaires

(voir [démonstration 01](#))

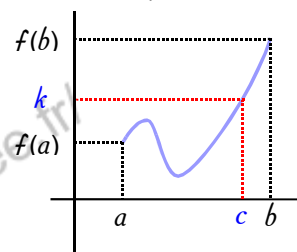
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b .



Exemple 4

f définie par $f(x) = x^3$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 8$.

Donc pour tout $k \in [1; 8]$, l'équation $x^3 = k$ a au moins une solution dans $[1; 2]$.

En particulier l'équation $x^3 = 5$ a au moins une solution α dans $[1; 2]$.

De plus, f étant strictement croissante, si $x > \alpha$, on a $f(x) > f(\alpha)$, donc $x^3 > 5$ et si $x < \alpha$, on a $f(x) < f(\alpha)$, donc $x^3 < 5$.

Il ne peut donc pas y avoir de solution à l'équation $x^3 = 5$, qui soit différente de α .

Donc l'équation $x^3 = 5$ a une solution α unique dans l'intervalle $[1; 2]$.

Déterminons une valeur approchée de α en utilisant la méthode de dichotomie.

On a $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$; $f(1,5) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 5$ et $f(2) > 5$.

Donc 5 est compris entre $f(1,5)$ et $f(2)$.

L'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que l'équation $x^3 = 5$ a une solution comprise entre 1,5 et 2.

Cette solution ne peut être que α . On a donc $1,5 < \alpha < 2$.

On a $\frac{1,5+2}{2} = 1,75$; $f(1,75) = 5,359375$ donc $f(1,75) > 5$ et $f(1,5) < 5$.

Donc 5 est compris entre $f(1,5)$ et $f(1,75)$.

L'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que l'équation $x^3 = 5$ a une solution comprise entre 1,5 et 1,75.

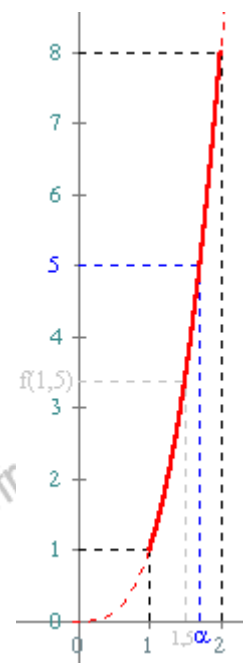
Cette solution ne peut être que α . On a donc $1,5 < \alpha < 1,75$.

En répétant le procédé, on obtient des encadrements de α d'amplitude diminuée de moitié à chaque étape.

Cela revient à dire que l'on construit deux suites u_n et v_n adjacentes dont la limite est α .

Après 4 étapes supplémentaires, on obtient $\alpha \approx 1,71$ à 10^{-2} près.

Nota : ce réel α est appelé racine cubique de 5, on note $\alpha = \sqrt[3]{5}$.



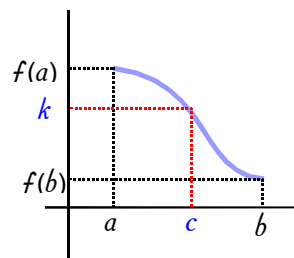
Théorème (voir [démonstration 02](#))

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un et un seul réel c dans $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x) = k$ a une solution unique c dans $[a ; b]$.



Remarque

Dans le cas où f est strictement croissante sur $[a ; b]$, le théorème précédent justifie que :

pour tout $k \in [f(a) ; f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans $[a ; b]$.

On dit que f réalise une bijection de $[a ; b]$ sur $[f(a) ; f(b)]$.

La fonction qui, à tout réel k de $[f(a) ; f(b)]$ associe l'unique réel c de $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$ est appelée fonction réciproque de f , elle est notée f^{-1} .

$f(c) = k$ se traduit alors par $c = f^{-1}(k)$

Lorsque f est strictement décroissante sur $[a ; b]$, elle réalise une bijection de $[a ; b]$ sur $[f(b) ; f(a)]$ et on notera de même f^{-1} sa fonction réciproque.

Remarque

Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle.

Par exemple :

- si f est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $]a ; b]$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x) ; f(b) \right]$ l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $]a ; b]$.
- si f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; a[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left] \lim_{x \rightarrow a} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$ l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $]-\infty ; a[$.

Exemple 5

La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

On a $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Pour tout réel $k \in [0 ; +\infty[$, l'équation $x^2 = k$ a une solution unique dans $[0 ; +\infty[$. Cette solution est $\sqrt{k}$

Donc f réalise une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$.

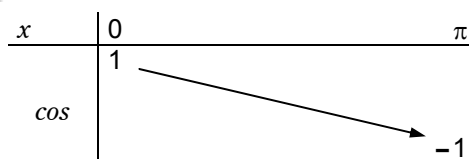
La fonction réciproque de la fonction "carré" est la fonction "racine carrée".

Exemple 6

Démontrons que l'équation $\cos x = \frac{1}{4}$ a une solution unique α dans $[0 ; \pi]$.

On connaît le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$



On a $-1 \leq \frac{1}{4} \leq 1$, ce tableau permet donc de justifier que l'équation $\cos x = \frac{1}{4}$ a, dans l'intervalle $[0 ; \pi]$, une solution unique α .

On peut donner une valeur approchée de α par balayage de l'intervalle $[0 ; \pi]$ par pas de 0,1

Une calculatrice ou un tableur peut donner les valeurs de $\cos x$ pour $x = 0,1 ; 0,2 ; 0,3$ etc...

On constate alors que $\cos(1,4) \leq \frac{1}{4} \leq \cos(1,3)$

F1-Tools	F2-Setup	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22	F23	F24	F25	F26	F27	F28	F29	F30	F31	F32	F33	F34	F35	F36	F37	F38	F39	F40	F41	F42	F43	F44	F45	F46	F47	F48	F49	F50	F51	F52	F53	F54	F55	F56	F57	F58	F59	F60	F61	F62	F63	F64	F65	F66	F67	F68	F69	F70	F71	F72	F73	F74	F75	F76	F77	F78	F79	F80	F81	F82	F83	F84	F85	F86	F87	F88	F89	F90	F91	F92	F93	F94	F95	F96	F97	F98	F99	F100																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
x	y1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														

Remarque

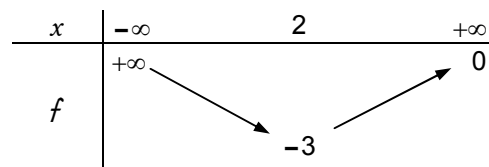
Les théorèmes précédents permettent de démontrer l'existence d'une ou de plusieurs solutions à une équation, mais il ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions. On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant la méthode de dichotomie (exemple 4) ou la méthode de balayage (exemple 5).

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

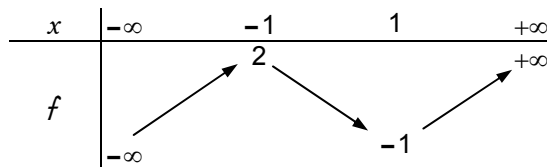
Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

On donne ci-contre le tableau de variations de f .
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$?
(On justifiera le résultat)



Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

On donne ci-contre le tableau de variations de f .
1°) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
2°) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -5$?
(On justifiera les résultats)



Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

On considère l'équation (E) : $\cos x = \frac{2}{3}x$

- 1°) Montrer que si x est solution de (E) alors $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 2°) Montrer que l'équation (E) a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
- 3°) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x^2$
et (C') la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{3x}$.
Quel est le nombre de points d'intersections de (C) et de (C') ? (Justifier)

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction h définie sur $[-1 ; +\infty[$ par $h(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$.

- 1°) Donner le tableau de variations de h .
- 2°) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique α dans $[-1 ; +\infty[$.
- 3°) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (Facultatif : donner la valeur exacte de α)