

Exercice A5

f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 0\}$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.

f est donc une fonction rationnelle et elle est définie à condition que $x^2 + 2x$ soit non nul, ce qui est le cas lorsque $x \neq 0$ et $x \neq -2$.

1°) L'ensemble de définition de f s'écrit $]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; +\infty[$.

f étant une fonction rationnelle, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Étudions les limites en -2 et en 0 .

On a $\lim_{x \rightarrow -2} (x+1)^2 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 2x = 0$ et d'autre part $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^2 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2x = 0$.

Donnons dans un tableau le signe de $x^2 + 2x$.

On peut utiliser les résultats sur le signe d'un trinôme du second degré et on obtient :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^2 + 2x$		$+$	0	$+$

On en déduit alors

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x+1)^2 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x^2 + 2x = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x+1)^2 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x^2 + 2x = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x+1)^2 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 + 2x = 0^-$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x+1)^2 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 + 2x = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

2°) f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+2x) - (x+1)^2(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{2(x+1)[x^2+2x - (x+1)^2]}{(x^2+2x)^2}$$

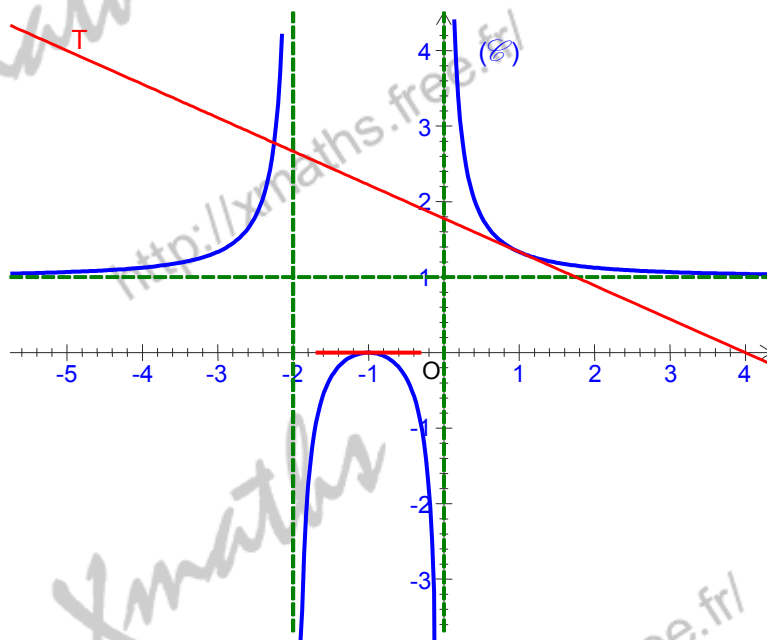
donc $f'(x) = \frac{2(x+1)[x^2+2x - x^2 - 2x - 1]}{(x^2+2x)^2} = \frac{2(x+1)(-1)}{(x^2+2x)^2}$. On a donc $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$.

3°) Comme $(x^2+2x)^2$ est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est le signe contraire de $x+1$.

On peut alors donner le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
f	1	$+\infty$	0	$+\infty$	1

- 4°) On trace la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en remarquant que celle-ci a :
- une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ quand $x \mapsto -\infty$ et $x \mapsto +\infty$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
 - une asymptote verticale d'équation $x = -2$ car $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.
 - une asymptote verticale d'équation $x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
 - une tangente horizontale au point d'abscisse -1 car $f'(-1) = 0$.



- 5°) Démontrons que la courbe $(\mathcal{C})$ a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -1$.

Pour cela, considérons le point I de coordonnées $(-1; 0)$ et plaçons nous dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit M un point de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(X; Y)$ dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.

La relation de Chasles $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM}$, permet d'écrire :
 $X = x + 1$ et $Y = y$ c'est-à-dire $x = X - 1$, $y = Y$

La courbe $(\mathcal{C})$ a pour équation : $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} \Leftrightarrow Y = \frac{X^2}{(X-1)^2 + 2(X-1)}$
 $\Leftrightarrow Y = \frac{X^2}{X^2 - 2X + 1 + 2X - 2} \Leftrightarrow Y = \frac{X^2}{X^2 - 1}$

Dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, $(\mathcal{C})$ représente donc la fonction F définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $F(X) = \frac{X^2}{X^2 - 1}$

L'ensemble de définition de F est symétrique par rapport à 0 et on a pour tout réel X de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$:

$$F(-X) = \frac{(-X)^2}{(-X)^2 - 1} = \frac{X^2}{X^2 - 1} = F(X).$$

F est donc une fonction paire et la courbe $(\mathcal{C})$ qui représente F a donc pour axe de symétrie l'axe IY.

$(\mathcal{C})$ a donc pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 6°) La tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

On a $f'(1) = \frac{-2 \times 2}{(1+2)^2} = -\frac{4}{9}$ et $f(1) = \frac{(1+1)^2}{(1+2)} = \frac{4}{3}$

L'équation s'écrit donc $y = -\frac{4}{9}(x - 1) + \frac{4}{3}$ c'est-à-dire $y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}$

Donc T a pour équation $y = -\frac{4}{9}x + \frac{16}{9}$