

Compléments de topologie

Préliminaires : on suppose connues les définitions d'espace métrique, espace normé, boule ouverte, fermée; voisinage et intérieur, point adhérent et adhérence d'un ensemble; parties denses d'un espace métrique.

On rappelle que deux distances d'un d et δ espace métrique sont *topologiquement équivalentes* ssi l'identité de (E, d) dans (E, δ) est un homéomorphisme (i.e Id_E et Id_E^{-1} sont continues).

Deux distances d'un espace métrique E d et δ espace métrique sont *équivalentes* ssi il existe deux réels k et k' strictement positifs tels que $k\delta \leq d \leq k'\delta$.

On notera que deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes mais que la réciproque est fausse (voir exercice 15). Par contre la réciproque est vraie pour les normes (voir exercice 19).

$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces vectoriels; si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ définissent trois normes équivalentes de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

(cela résulte des inégalité facile à établir : $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq n\|\cdot\|_\infty$).

De même dans $C([a; b]; \mathbf{K})$ espace vectoriel des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on définit des normes en posant :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt ; \quad \|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

Montrons que ces normes ne sont pas équivalentes.

Pour tout f de E on a $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$ et $\|f\|_2 \leq (b-a)^{1/2}\|f\|_\infty$. De plus d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales on a

$$\int_a^b |f| = \int_a^b 1 \cdot |f| \leq \left[\int_a^b 1^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b |f|^2 \right]^{1/2} \quad \text{soit} \quad \|f\|_1 \leq (b-a)^{1/2} \cdot \|f\|_2.$$

Montrons qu'on n'a pas d'inégalité en sens inverse. Prenons $[a, b] = [0, 1]$ et f_n définie par son graphique ci-contre. On a $\|f_n\|_1 = 1/2$ et $\|f_n\|_\infty = n$ ce qui montre qu'il n'existe pas de constantes k telle que $\|f\|_\infty \leq k\|f\|_1$ pour tout f de E . On montrera de même qu'il n'existe pas de constante k' telle que $\|f\|_\infty \leq k'\|f\|_2$ pour tout f de E .

Pour montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes on considère f_n définie par son graphique. On a facilement $\|f_n\|_1 \leq 2$ et $\|f_n\|_2 \geq \sqrt{n}$ donc il n'existe pas de constantes k'' telle que $\|\cdot\|_2 \leq k''\|\cdot\|_1$.

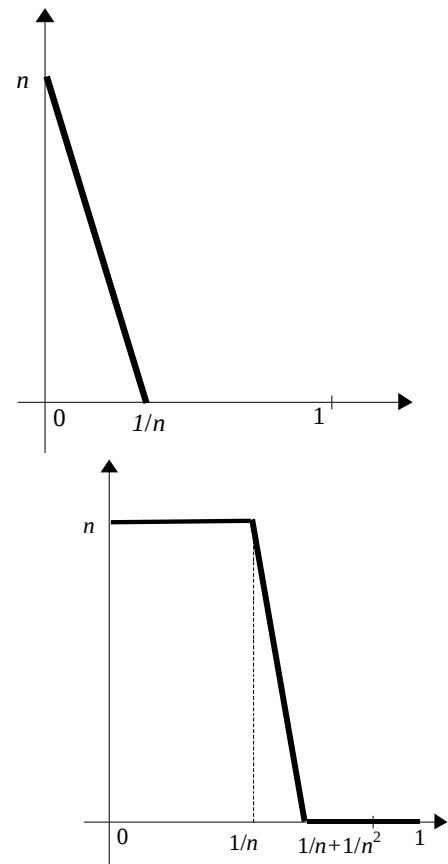
Soit $\mathbf{1}(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites à valeurs à valeurs réelles ou complexes. On note :

$\mathbf{1}^1(\mathbb{N})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{1}(\mathbb{N})$ des suites absolument convergentes; c'est un espace vectoriel normé muni de la norme

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|;$$

$\mathbf{1}^2(\mathbb{N})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{1}(\mathbb{N})$ des suites (x_n) telles que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty ; \quad \text{c'est un espace vectoriel normé muni de la norme} \quad \|x\| = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 \right]^{1/2};$$



$\ell^\infty(\mathbb{N})$ le sous-espace vectoriel de $\ell(\mathbb{N})$ des suites bornées; ; c'est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

1. Espaces complets

1.1 Définitions; propriétés

Un espace métrique $(E; d)$ est *complet* ssi toute suite de Cauchy de E est convergente.

Un espace vectoriel normé complet s'appelle *espace de Banach*.

Remarquons que si un espace métrique $(E; d)$ est complet il reste complet en remplaçant d par n'importe quelle distance équivalente. Cela est faux si on remplace d par une distance topologiquement équivalente.

Propriétés :

- (i) Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach ssi toute série $\sum x_n$ de E convergente en norme (i.e. $\sum \|x_n\| < +\infty$) est convergente.
- (ii) Un sous-ensemble F fermé d'un espace complet est complet:
- (iii) Un sous-espace complet d'un espace métrique est fermé;
- (iv) un produit fini $E_1 \times \dots \times E_n$ d'espaces métriques est complet ssi chaque E_i l'est.

Démonstration:

(i) Soit E un espace de Banach et supposons que $\sum \|x_n\| < +\infty$. D'après le critère de Cauchy pour les séries, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que : $\forall p \text{ et } q \in \mathbb{N}, (q \geq p \geq N \Rightarrow \sum_{k=p}^q \|x_k\| \leq \varepsilon)$. D'après l'inégalité

triangulaire on a $\left\| \sum_{k=p}^q x_k \right\| \leq \varepsilon$ pour $q \geq p \geq N$. La série $\sum x_n$ vérifie le critère de Cauchy pour les séries donc elle est convergente, E étant complet.

Réciproquement supposons que toute série convergente en norme est convergente dans E et montrons que E est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E . Montrons par récurrence qu'il existe une suite d'entiers naturels (n_k) strictement croissante telle que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$ et $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \text{ et } q \geq n_{k+1} \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{2^{k+1}})$.

La suite (x_n) étant de Cauchy il existe un entier naturel N tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \text{ et } q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq 1)$ et il existe un entier naturel $N' > N$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \text{ et } q \geq N' \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq 1/2)$. On pose $n_0 = N$ et $n_1 = N'$ et on a bien $\|x_{n_1} - x_{n_0}\| \leq 1$ et $\|x_p - x_q\| \leq 1/2$ pour p et $q \geq n_1$.

Supposons construit la suite $(n_0, n_1, \dots, n_k, n_{k+1})$ et vérifiant les conditions précédentes. La suite (x_n) étant de Cauchy il existe un entier naturel $N > n_{k+1}$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \text{ et } q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{2^{k+2}})$. Posons $n_{k+2} = N$. On a

$\|x_{n_{k+2}} - x_{n_{k+1}}\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ car $n_{k+2} \geq n_{k+1}$ et la suite (n_k) est ainsi construite par récurrence.

La série $\sum_{k \geq 0} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ est donc convergente et d'après l'hypothèse il en est de même de la série $\sum_{k \geq 0} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$. Or,

pour tout entier naturel non nul n , on a $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_n} - x_{n_0}$ donc la suite (x_{n_k}) , extraite de (x_n) , est convergente

dans E . La suite (x_n) étant de Cauchy et ayant une valeur d'adhérence elle est convergente (Chapitre "Suites et séries de nombres", exercice complémentaire 3) et donc E est complet.

(ii) Soit (x_n) une suite de Cauchy d'un espace fermé F d'un espace complet E . Alors elle est convergente dans E vers $l \in E$. Comme F est fermé on a $l \in F$ donc la suite (x_n) converge dans F et F est complet.

(iii) Soit F un sous-ensemble complet d'un espace métrique E . Soit (x_n) une suite convergente de F . Alors c est une suite de Cauchy de F . F étant complet sa limite est dans F donc F est fermé.

(iv) Rappelons que si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces métriques munis des distances respectives $d_1, \dots, d_n$ alors $E_1 \times \dots \times E_n$ peut être muni par exemple de l'une des distances équivalentes suivantes : $\text{Max}(d_1, \dots, d_n)$, $d_1 + \dots + d_n$ ou $(d_1 + \dots + d_n)^{1/2}$. On démontre alors facilement le (iii) en remarquant qu'une suite $s_p = (x_1^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ de $E_1 \times \dots \times E_n$ est convergente ssi chaque « suite composante » $(x_k^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l_k et sa limite est alors $(l_1, \dots, l_n)$, et que (s_p) est de Cauchy ssi chaque $(x_k^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E_k .

Exercice 1

1°/ Montrer que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis de l'une des trois normes précédentes est un espace de Banach.

2°/ Même question pour $C([a, b]; \mathbf{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3°/ Montrer que les espaces $\mathbf{1}^1(\mathbb{N})$, $\mathbf{1}^2(\mathbb{N})$ et $\mathbf{1}^\infty(\mathbb{N})$ munis des normes précédentes sont des espaces de Banach.

4°/ Montrer que $C([a, b]; \mathbf{K})$ muni des normes $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet.

L'intérêt principal des espaces complets tient dans le théorème suivant.

1.2 Théorème du point fixe

Soit E un espace métrique complet et $f: E \rightarrow E$ une application contractante (i.e : il existe un réel $k \in [0; 1[$ tel que pour tous x et y de E on ait $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$).

Alors f a un unique point fixe, limite de la suite récurrente définie par $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$.

Démonstration :

Pour tout entier p on a facilement par récurrence $d(x_{p+1}, x_p) \leq k^p d(x_1, x_0)$. Pour r entier ≥ 1 on écrit

$$d(x_{p+r}, x_p) \leq d(x_{p+r}, x_{p+r-1}) + \dots + d(x_{p+1}, x_p) \leq (k^{p+r-1} + \dots + k^p) d(x_1, x_0) = \frac{k^p - k^{p+r}}{1-k} d(x_1, x_0) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Cette dernière quantité tendant vers 0 avec p , cela prouve que la suite (x_n) est une suite de Cauchy donc convergente vers $\alpha \in E$.

D'autre part pour tout entier n on a $x_{n+1} = f(x_n)$. Une application contractante étant continue on en déduit en faisant tendre n vers l'infini que $\alpha = f(\alpha)$ donc α est point fixe de f .

Si β est un autre point fixe on a $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) \leq kd(\alpha, \beta)$. Comme $k \in [0, 1[$ cela implique que $d(\alpha, \beta) = 0$ soit $\alpha = \beta$.

Remarque : si on remplace $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ par $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous x et y distincts de E , la conclusion peut tomber en défaut. Par exemple si f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$, on a $f'(x) \in [0, 1[$ pour tout x donc pour tous réels x et y distincts on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ d'après le théorème des accroissements finis et f n'a pas de point fixe.

Exercice 2 (Théorème de l'itérée contractante)

Soit E un espace métrique complet et une application $f : E \rightarrow E$. S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (i.e $f \circ f \circ \dots \circ f$ p fois) soit contractante alors on a les mêmes conclusions que dans le théorème précédent : f a un unique point fixe, limite de la suite récurrente définie par
$$\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f^p(x_n) \end{cases} \quad (x_0 \text{ quelconque dans } E).$$

Exercice 3 : application aux équations différentielles et intégrales

1°/ Soit K une application de $[a, b] \times [a, b]$ ($a < b$) dans $\mathbb{R}$ continue et φ une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue. Alors l'équation $f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x)$ (équation de Fredholm) d'inconnue f a une unique solution dans $C([a, b]; \mathbb{R})$ pour λ suffisamment petit.

2°/ Avec les mêmes hypothèses que dans la question 1°/ l'équation $f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x)$ (équation de Volterra) admet une solution unique pour toute valeur de λ .

3°/ Soit $t \mapsto A(t)$ étant une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (matrices carrées de type (n, n) à coefficients complexes) et g une application de I dans $\mathbb{C}^n$.

Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (*)$$
 a une unique solution définie dans I .

2. Espaces compacts**2.1 Définitions; propriétés**

Un espace métrique (E, d) est *compact* ssi de tout recouvrement de E par des ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Autrement dit si $(U_i) (i \in I)$ est une famille d'ouverts telle que $\bigcup_{i \in I} U_i = E$, alors il existe une partie finie J de I telle que
$$\bigcup_{i \in J} U_i = E.$$

Cette définition a l'avantage d'être valable dans un espace topologique quelconque. On donnera au 2.2 des caractérisations pratiques dans les espaces métriques.

Exemples : $\mathbb{R}$ n'est pas compact (considérer le recouvrement $]n-1; n+1[$).

$\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ est compact.

Exercice 4

Montrer qu'un espace métrique E est compact ssi pour tout ensemble de parties fermées de E dont l'intersection est vide il existe un nombre fini de ces parties dont l'intersection est vide.

Exercice 5

Si E est un espace métrique compact et si $(F_n) (n \in \mathbb{N})$ est suite décroissante de fermés dont l'intersection est vide, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $F_p = \emptyset$.

2.2 Caractérisation des espaces métriques compacts

Donnons une définition :

Définition : un espace métrique E est *précompact* ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon inférieur ou égal à ε .

Le théorème suivant permet de prouver la compacité de certains sous-ensembles d'espaces métriques plus facilement que par l'emploi de la définition.

Théorème (caractérisation des espaces métriques compacts) :

Soit E un espace métrique. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) E est un espace métrique compact;
- (ii) toute suite d'éléments de E a au moins une valeur d'adhérence;
- (iii) E est précompact et complet;

Rappelons que la condition (ii) équivaut à : de toute suite de E on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : soit (x_n) une suite de E et posons $F_n = \overline{\{x_k / k \geq n\}}$ (adhérence de l'ensemble $\{x_k / k \geq n\}$). (F_n) est ainsi une suite décroissante de fermés. Comme aucun des F_k n'est vide on a $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$ d'après l'exercice 5. Soit $\alpha \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$, ε un réel > 0 et p un entier naturel quelconque. Alors la boule $B(\alpha, \varepsilon)$ rencontre F_p donc elle contient un x_k pour $k \geq p$. α est ainsi une valeur d'adhérence de la suite (x_n) .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : supposons que toute suite de E ait une valeur d'adhérence.

lemme : Soit R un recouvrement de E par des ouverts. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de rayon $\leq \varepsilon$ soit contenue dans au moins un des ouverts du recouvrement.

Démontrons le lemme par l'absurde : si la conclusion est fautive, pour tout entier naturel non nul n il existe une boule $B(a_n, 1/n)$ de centre a_n et de rayon $1/n$ qui n'est contenue dans aucun des ouverts du recouvrement. Par hypothèse la suite (a_n) a une valeur d'adhérence α . Soit $O \in R$ tel que $\alpha \in O$. Comme O est ouvert il existe une boule $B(\alpha, r)$ de centre α et de rayon $r > 0$ incluse dans O , et α étant une valeur d'adhérence de (a_n) la boule $B(\alpha, r/2)$ contient a_k pour une infinité de k donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_p \in B(\alpha, r/2)$ avec de plus $1/p < r/2$. L'inégalité triangulaire montre alors que la boule $B(a_p, 1/p)$ est incluse dans $B(\alpha, r)$ donc aussi dans O contrairement à l'hypothèse, ce qui prouve le lemme.

Montrons maintenant que E est précompact. Soit $\varepsilon > 0$ et $a_0 \in E$. Si $B(a_0, \varepsilon) = E$ c'est terminé sinon soit $a_1 \in E - B(a_0, \varepsilon)$. Si $E = B(a_0, \varepsilon) \cup B(a_1, \varepsilon)$ on s'arrête sinon on considère $a_2 \in E - B(a_0, \varepsilon) \cup B(a_1, \varepsilon)$. On continue ainsi et si le processus ne s'arrête pas on construit une suite (a_n) de E telle que pour entier $p > 0$, $a_p \notin \bigcup_{k=0}^{p-1} B(a_k, \varepsilon)$ soit $d(a_p, a_q) > \varepsilon$ pour tout entier $q < p$. Soit α une valeur d'adhérence de la suite (a_n) . Alors il existe deux entiers p et q distincts tels que $d(\alpha, a_p) \leq \varepsilon/3$ et $d(\alpha, a_q) \leq \varepsilon/3$ soit $d(a_p, a_q) < \varepsilon$ ce qui est contradictoire. E est donc précompact.

Montrons enfin que E est complet. Si (x_n) est une suite de Cauchy, comme elle a une valeur d'adhérence α on montre (comme au lemme (i) du 2.4 « Suites de réels ») que α est la limite de (x_n) . Donc E est complet.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : soit E un espace précompact et complet. Notons que cela implique que E est borné donc inclus dans une boule. En multipliant la distance d de E par une constante on peut supposer que d vérifie $d \leq 1/2$. Donc E est égal à une boule de rayon 1.

Supposons que E ne soit pas compact : il existe alors un recouvrement R de E par des ouverts tel qu'on ne puisse en extraire aucun sous-recouvrement fini. Définissons par récurrence une suite de boules B_k de E de la façon suivante : $B_0 = E$; supposons B_k construite pour $0 \leq k \leq n-1$ de rayon $1/2^k$, telle qu'il n'existe aucune sous-famille finie de R recouvrant B_k et $B_k \cap B_{k-1} \neq \emptyset$. E étant précompact on peut le recouvrir par des boules V_k de rayon $1/2^n$; parmi les boules V_k ayant une intersection non vide avec B_{n-1} il y-en a une au moins qui ne peut être recouverte par un nombre fini d'éléments de R (sinon ces V_k formant un recouvrement de B_{n-1} on pourrait recouvrir B_{n-1} par sous-famille finie de R). On prend un de ces V_k pour B_n et la récurrence peut se poursuivre indéfiniment.

Soit x_n le centre de la boule B_n . Comme B_n et B_{n-1} ont un point en commun l'inégalité triangulaire donne

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq 1/2^{n-1} + 1/2^n \leq 1/2^{n-2}.$$

On a alors pour $p < q$: $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \dots + \frac{1}{2^{q-2}} \leq \frac{1}{2^{p-2}}$. Cela prouve que la suite (x_n) est de Cauchy donc elle converge vers $\alpha \in E$ puisque E est complet.

Il existe un élément O de R tel que $\alpha \in O$ et, O étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(\alpha, r)$ de centre α et de rayon r soit incluse dans O . De plus il existe un entier p tel que $d(\alpha, x_p) < r/2$ et $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$. L'inégalité triangulaire montre alors que $B_p \subset B(\alpha, r) \subset O$, d'où contradiction car par construction B_p ne peut être recouverte par un nombre fini d'éléments de R .

Corollaire :

- (i) un sous-espace compact d'un espace métrique est fermé et borné;
- (ii) un sous-ensemble fermé d'un espace métrique compact E est compact;
- (iii) les compacts de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) sont les ensembles fermés et bornés;
- (iv) un produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ d'espaces métriques est compact ssi chaque E_i est compact (*Théorème de Tychonov*).

Démonstration :

(i) Soit F un sous-espace compact d'un espace métrique E . F est précompact et on peut l'écrire comme une réunion finie de boules de rayon 1 (par exemple) donc E est borné.

D'autre part si (x_n) est une suite d'élément de F convergente dans E vers α , il existe une suite (x_{n_k}) extraite de (x_n) convergeant vers $\beta \in F$ d'après le théorème (ii) précédent. α étant la limite de toute suite extraite de (x_n) on a $\alpha = \beta$ donc $\alpha \in F$ ce qui montre que F est fermé dans E (« Suites de réels », 2.1).

(ii) Soit F un sous-espace fermé d'un espace métrique compact E . Soit (x_n) une suite de F . E étant compact il existe une suite (x_{n_k}) extraite de (x_n) convergeant vers $\beta \in E$. Comme F est fermé β appartient à F donc F est compact d'après la caractérisation (ii) du théorème précédent.

(iii) Voir « Suite réelles et complexes » 2.2.

(iv) Supposons que chaque E_k ($1 \leq k \leq p$) soit compact et soit $u_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})_n$ une suite de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$. E_1 étant compact il existe une application φ_1 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(x_1^{(\varphi_1(n))})_n$ soit convergente dans E_1 vers α_1 . De même en considérant la suite $x_2^{(\varphi_1(n))}$ de E_2 , il existe une application φ_2 strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(x_2^{(\varphi_1 \varphi_2(n))})_n$ soit convergente dans E_2 vers α_2 . Notons que la suite $x_1^{(\varphi_1 \varphi_2(n))}$ converge encore vers α_1 car c'est une suite extraite de $(x_1^{(\varphi_1(n))})_n$. En continuant ainsi jusqu'à la dernière composante il existe des applications $\varphi_3, \dots, \varphi_p$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(x_k^{(\varphi_1 \dots \varphi_p(n))})_n$ soit convergente vers α_k pour $1 \leq k \leq p$ donc la suite $(u_{\varphi_1 \dots \varphi_p(n)})_n$, qui est une suite extraite de (u_n) , converge vers $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est donc compact d'après le (ii) du théorème précédent.

Réciproquement supposons l'espace métrique (E_k, d_k) compact pour $1 \leq k \leq p$. Soit δ d'une des distances de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ définies dans la propriété (iii) du 1.1. L'inégalité $d_k \leq \delta$ montre que la projection p_k de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ dans E_k est continue. En admettant (provisoirement) le théorème 1 du 2.3, $E_k = p_k(E_k)$ est compact.

Exercice 6

Montrer qu'un espace métrique E compact est *séparable* (i.e. il existe un sous-ensemble de E dense et dénombrable) (Pour $n \in \mathbb{N}^*$ recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon $1/n$ en utilisant la précompacité de E)

Exercice 7

Montrer que la boule unité de $\mathbb{L}^1(\mathbb{N})$ est un ensemble fermé et borné non compact.

2.3 Espaces compacts et applications continues

Théorème 1 : Soit f une application continue d'un espace métrique compact dans E dans un espace métrique F . Alors $f(E)$ est un compact de F .

En bref « l'image continue d'un compact est un compact ».

Démonstration :

Soit $(f(x_n))$ une suite de $f(E)$. E étant compact on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\alpha \in E$. f étant continue la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(\alpha)$ (I. 2.3.1) donc $f(E)$ est compact.

Conséquences : Soit f une application continue d'un espace métrique compact dans E dans un espace métrique F .

(i) f est bornée;

(ii) Si $F = \mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes inférieures et supérieures;

(iii) Si f est bijective f est un homéomorphisme de E dans F .

Le (ii) signifie qu'il existe a et b dans E tels que $f(a) = \sup_{x \in E} f(x)$ et $f(b) = \inf_{x \in E} f(x)$. C'est une propriété très souvent utilisée. Le théorème de Riezs (voir 4.2) en donne un exemple d'application ainsi que les trois exercices suivants.

Démonstration :

(i) Clair d'après le théorème 1 et le fait qu'un compact est borné.

(ii) Même démonstration qu'en I.2.3.2 du chapitre « Suites de nombres réels ou complexes ».

(iii) Il s'agit de montrer que f^{-1} est continue. Soit Y un fermé de E . D'après le (ii) du corollaire du 2.2 Y est un compact de E donc $f(Y) = (f^{-1})^{-1}(Y)$ est un compact de F donc fermé dans F . L'image réciproque par f^{-1} de tout fermé de E étant fermée dans F , f^{-1} est continue.

Exercice 8

Soit E un espace métrique compact et f une isométrie de E dans E . Montrer que f est bijective.

Exercice 9 : distance dans un espace métrique d'un point à un fermé

Soit E un espace métrique où les boules fermées sont compactes (par exemple $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ d'après le (iii), corollaire du 2.2). Alors pour tout fermé non vide F de E et tout point a de E il existe $\alpha \in F$ tel que $d(a, F) = d(a, \alpha)$ (autrement dit le point a a une meilleure approximation dans F).

Exercice 10 : un autre théorème du point fixe

Soit f une application d'un compact E dans lui-même tel que pour tout x et y distincts de E on ait : $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Montrer que f a un unique point fixe (comparer avec les hypothèses du théorème du point fixe)

(Indication : considérer l'application $x \mapsto d(f(x), x)$ de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 11 : encore un théorème du point fixe

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact convexe de E . Soit f une application de K dans K telle que pour tous x et y de K , $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Montrer que f a au moins un point fixe.

Exercice 12

Soit E un espace métrique compact et $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'on définit une norme dans l'espace vectoriel $C(E, F)$ des applications continues de E dans F en posant $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$. Si F est complet,

$C(E, F)$ muni de cette norme aussi (cela généralise les propriétés de $C([a, b], \mathbf{K})$ de l'introduction).

L'exercice suivant utilise le (iii) du théorème.

Théorème 2 : Soit f une application continue de E espace métrique compact dans un espace métrique F . Alors f est uniformément continue dans E .

Ce théorème a été souvent utilisé dans les chapitres précédents : convergence des polynômes de Bernstein, continuité de $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ etc.

Démonstration du théorème 2 : même démonstration que le théorème 2 du 2.3.2 de « Suites et séries de fonctions »).

3. Espaces connexes

3.1 Définitions et propriétés

Un espace métrique E est *connexe* ssi il ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides.

Intuitivement E est en « un seul morceau ».

On voit immédiatement que la définition est équivalente à : les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont E et l'ensemble vide.

Par exemple $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe puisqu'il s'écrit $]-\infty; \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} \cup]\sqrt{2}; +\infty[\cap \mathbb{Q}$.

Les principales propriétés générales des ensembles connexes sont les suivantes :

Propriétés :

- (i) Un ensemble E est connexe ssi les seules applications continues de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0; 1\}$ sont les applications constantes;
- (ii) Si A et B sont deux parties non disjointes et connexes d'un espace métrique E alors $A \cup B$ est connexe;
- (iii) Si A est une partie connexe de E et si B est telle que $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est une partie connexe de E . En particulier si A est connexe, $\bar{A}$ aussi.
- (iv) Un produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est connexe ssi chaque E_k est connexe.

Le (i) donne un critère plus pratique que la définition pour montrer qu'un ensemble est connexe.

Démonstration :

(i) *Condition nécessaire* : notons que dans $\{0, 1\}$ les ensembles $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts puisque $\{0\} =]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\cap \{0, 1\}$ et $\{1\} =]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[\cap \{0, 1\}$. Soit E un ensemble connexe et f une application continue de E dans $\{0, 1\}$. Si f n'est pas constante alors $U = f^{-1}(\{0\})$ et $V = f^{-1}(\{1\})$ sont deux ouverts de E non vides disjoints dont la réunion est E ce qui contredit la connexité de E ;

Condition suffisante : supposons que toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ soit constante et que E ne soit pas connexe. Il existe alors deux ouverts U et V non vides disjoints dont la réunion est E . Soit f l'application de E dans $\{0, 1\}$ qui associe 0 à tout élément de U et 1 à tout élément de V . Alors f n'est pas constante et est clairement continue puisque l'image réciproque par f de tout sous-ensemble de $\{0, 1\}$ est E, U, V ou $\emptyset$.

(ii) Soit f une application continue de $A \cup B$ dans $\{0, 1\}$. Comme A et B sont connexes les restrictions de f à A et à B sont constantes. Si $a \in A \cap B$ on a donc $f(x) = f(a)$ pour tout x de A ainsi que pour tout x de B , donc f est constante et $A \cup B$ est connexe d'après le (i);

(iii) Soit de même f une application continue de B dans $\{0, 1\}$. A étant connexe la restriction de f à A est constante : il existe $c \in \{0, 1\}$ tel que $f(x) = c$ pour tout x de A . Comme $B \subset \bar{A}$ tout élément y de B est limite d'une suite (x_n) d'éléments de A . f étant continue on a $f(y) = \lim f(x_n) = c$, donc f est constante et B est connexe;

(iv) *Condition nécessaire* : si $\prod_{k=1}^n E_k$ est connexe, et si p_j est la projection de $\prod_{k=1}^n E_k$ dans E_j , p_j est continue donc

$E_j = p_j(\prod_{k=1}^n E_k)$ aussi en admettant le théorème du 3.2.

Condition suffisante : faisons la démonstration pour $n = 2$ (on termine facilement par récurrence). Si f est une application continue de $E_1 \times E_2$ dans $\{0, 1\}$ et si $(a, b) \in E_1 \times E_2$, la connexité de E_1 et E_2 montre que les applications partielles $x \mapsto f(x, b)$ et $x \mapsto f(a, x)$ de E_1 dans $\{0, 1\}$ et de E_2 dans $\{0, 1\}$ sont constantes. Si (x, y) et

(x', y') appartiennent à $E_1 \times E_2$ on a $f(x, y) = f(x', y)$ et $f(x', y) = f(x', y')$ donc $f(x, y) = f(x', y')$. F est constante donc $E_1 \times E_2$ est connexe.

Théorème : les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration :

lemme : (i) une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi elle vérifie : $(x \text{ et } y \text{ appartiennent à } I) \Rightarrow]x, y[\subset I$.

(ii) Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe et dénombrable d'intervalles ouverts.

Démonstration du le lemme : (i) il est clair qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de l'énoncé. Soit $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant cette propriété I distinct d'un singleton. Posons $m = \inf I$ et $M = \sup I$ (avec $m = -\infty$ si I n'est pas minoré et $M = +\infty$ si I n'est pas majoré); on a $m \neq M$ car I n'est pas réduit à un point. Soit $a \in]m, M[$. Comme $m < a$ et $m = \inf I$ il existe $x \in I$ tel que $x < a$. De même il existe $y \in I$ tel que $a < y$. On a donc $a \in]x, y[$ qui est inclus dans I d'après l'hypothèse donc $a \in I$. Ainsi $]m, M[\subset I$; mais $[m, M] \supset I$ donc I est égal à l'un des intervalles $]m, M[$, $[m, M]$, $[m, M[$ ou $]m, M]$ d'où le (i) du lemme.

(ii) Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et considérons dans O la relation R définie pour tout x et y de O par : $x R y$ ssi $]x, y[\subset O$. R est clairement une relation d'équivalence et d'après le (i) les classes d'équivalences sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et O étant ouvert on voit facilement que ces intervalles sont ouverts. Donc O est réunion disjointe d'intervalles ouverts I_a . Si on choisit dans chaque I_a un rationnel r_a , l'application qui à I_a associe r_a est une injection de l'ensemble $(I_a)_a$ dans $\mathbb{Q}$, donc $(I_a)_a$ est dénombrable.

Démonstration du théorème : montrons qu'un connexe I de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Sinon d'après le lemme il existe $(x, y) \in I^2$ tel que $]x, y[$ ne soit pas inclus dans I . Il existe donc c dans $]x, y[$ tel que $c \notin I$. On aurait alors $I =$

$(]-\infty, c[\cap I) \cup (]c, +\infty[\cap I)$ et I s'écrit comme réunion disjointe de deux ouverts non vides de I , ce qui contredit la connexité de I .

Réciproquement montrons qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe. Supposons d'abord que I soit un intervalle ouvert non vide. Si I est non connexe il s'écrit comme réunion disjointe de deux ouverts de I (donc de $\mathbb{R}$ car I est ouvert) U et V , non vides. U et V sont réunion disjointe d'intervalles ouverts (U_i) et (V_j) respectivement. Soient $x \in U$ et $y \in V$ avec par exemple $x < y$. Il existe i tel que $x \in U_i =]a, b[\subset U$ et de même il existe j tel que $y \in V_j =]c, d[\subset V$. On a $b \notin U$ (sinon b appartiendrait à l'un des intervalles ouverts U_p qui ne serait alors pas disjoint avec U_i) et $b \notin V$ (sinon b appartiendrait à l'un des intervalles ouverts V_q et alors V_q rencontrerait U_i donc U). On a : $x < b < y$, avec x et y dans I et $b \notin I$ ce qui contredit le (i) du lemme. Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ on a $\overset{\circ}{I} \subset I \subset \bar{I}$ et on conclut d'après le (iii) des propriétés précédentes (si $\overset{\circ}{I}$ est vide, I est réduit à un point qui est clairement connexe).

Autre démonstration : montrons que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes en utilisant la caractérisation (i) de la propriété précédente. Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point et considérons une application continue f de I dans $\{0; 1\}$ non constante. Il existe donc a_0 et b_0 dans I tels que $f(a_0) = 0$ et $f(b_0) = 1$. Soit m le milieu de l'intervalle $[a_0 b_0]$. Si $f(m) = 0$ on pose $a_1 = m$ et $b_1 = b_0$; si $f(m) = 1$ on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = m$. En continuant on construit par récurrence

une suite de segments emboîtés $[a_n b_n]$ inclus dans I , de longueur $\frac{|a_0 - b_0|}{2^n}$ tels que pour tout entiers naturels n on ait :

$f(a_n) = 0$ et $f(b_n) = 1$. Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite α , et en passant à la limite les deux égalités précédentes il vient grâce à la continuité de f : $f(\alpha) = 0$ et $f(\alpha) = 1$, ce qui est absurde.

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^2$ donner un exemple de suites décroissante de connexes dont l'intersection n'est pas connexe.

3.2 Applications continues et connexes

Théorème : l'image par une fonction continue d'un ensemble connexe est connexe.

Démonstration : soit E un ensemble connexe et f une application continue de E dans un espace métrique F . Soit g une application continue de $f(E)$ dans $\{0, 1\}$. Alors $g \circ f$ est une application continue de E dans $\{0, 1\}$, donc constante puisque E est connexe. On en déduit immédiatement que g est constante donc $f(E)$ est connexe.

Autre démonstration : utilisant la définition d'un ensemble connexe. Si $f(E)$ n'est pas connexe il s'écrit comme réunion disjointe de deux ouverts non vides de $f(E)$: $U \cap f(E)$ et $V \cap f(E)$ (où U et V sont deux ouverts de F). On a alors

$E = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont deux ouverts de E (car f est continue), non vide (car c'est le cas de $U \cap f(E)$ et de $V \cap f(E)$) et disjoints (car $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(E)) = \emptyset$), ce qui est absurde puisque E est connexe.

Exemple : la sphère unité S_{n-1} de $\mathbb{R}^n$ est connexe (en effet par projection stéréographique $S_{n-1} - \{A\}$, sphère unité de $\mathbb{R}^n$ privée d'un point A , est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ qui est connexe donc $S_{n-1} - \{A\}$ donc connexe. Donc son adhérence S_{n-1} aussi).

Une application de ce théorème est l'existence des fonctions réciproques usuelles (Arcsin, Arccos Arctan); plus précisément :

Conséquences :

(i) « Théorème de la valeur intermédiaire » : si f est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;

(ii) « Existence et continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ » : soit f une application continue d'un intervalle $I = (a; b)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue strictement monotone. Alors $f((a, b))$ est un intervalle de même nature que $(a; b)$ (c'est-à-dire fermé, semi-ouvert ou ouvert) et f est un homéomorphisme de (a, b) dans $f((a, b))$.

Démonstration : (i) résulte du théorème précédent et du fait que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

(ii) d'après le (i) $f((a, b))$ est un intervalle et f étant strictement monotone elle est injective donc f est une bijection de I sur $f((a, b))$. Supposons par exemple f strictement croissante. Si $I = [a, b)$ alors pour tout x de I , $f(x) \geq f(a)$ et $f(a) \in f(I)$ donc $f(I) = [f(a), \beta)$. Si I est de la forme $]a, b)$ (avec éventuellement $a = -\infty$) et si $f(I) = [\alpha, \beta)$ soit $x_0 \in I$ l'antécédent de α par f . Si y vérifie $a < y < x_0$ alors $f(y) < f(x_0) = \alpha$, ce qui est absurde car $f(y) \in f(I)$ donc $f(y) \geq \alpha$. On traiterait de même les autres cas et donc les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature.

Montrons que f^{-1} est continue de $f(I)$ dans I . Soit $y = f(x) \in f(I)$. Si x est intérieur à l'intervalle I et si $x \in]c, d[\subset I$ alors $f[)c, d[) =]f(c), f(d)[$ d'après le raisonnement précédent donc $f^{-1}(]f(c), f(d)[) \subset]c, d[$ et f^{-1} est continue en y . On raisonne de même si y est égal à une des extrémités de l'intervalle I .

Le 1° de l'exercice suivant donne une réciproque partielle du (ii) :

Exercice 14

1°/ Soit f une fonction continue et injective d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement monotone sur I .

2°/ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x : $f \circ f(x) = ax + b$. Montrer que a est strictement positif.

Exercice 15

Soit f une application continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout x et y de $\mathbb{R}$

$\delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$ topologiquement équivalent à $||$.

Si f est bornée (par exemple $f = \text{Arctan}$) alors δ et la valeurs absolue sont deux distances topologiquement équivalentes mais non équivalentes.

Donnons quelques applications simples du théorème :

Exercice 16

1°/ Une application continue de $[a; b]$ dans $[a; b]$ a au moins un point fixe.

2°/ $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ (et plus généralement à $\mathbb{R}^n$).

3°/ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

3.3 Connexité par arcs

On appelle *chemin* d'un espace métrique E toute application continue de l'intervalle $[0; 1]$ dans E . On dit que E est *connexe par arcs* ssi pour tout point x et y de E il existe un chemin γ qui joint x à y i.e tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

L'exercice suivant donne le lien entre connexité et connexité par arcs :

Exercice 17

1°/ Montrer que si E est connexe par arcs alors il est connexe.

2°/ Montrer que si E est espace vectoriel normé et si D est un ouvert de E on a :

$$D \text{ connexe} \Leftrightarrow D \text{ connexe par arcs}$$

(Indication : si $x_0 \in D$ considérer l'ensemble des points de D qui peuvent être joints à x_0 par un chemin de D et montrer que c'est un ensemble à la fois ouvert et fermé de D).

Contre-exemple : la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée de la réunion du graphique de la fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$ et de $\{0\} \times [0; 1]$ est connexe et non connexe par arcs.

4. Compléments sur les espaces vectoriels normés

4.1 Equivalence des normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Théorème : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration du théorème : soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme de E définie par $\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. Montrons que ces deux normes sont équivalentes, ce qui montrera que toutes les normes de E sont équivalentes.

$$\text{Pour tout } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \text{ de } E \text{ on a } \|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^n |x_k| \|e_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\| \right) \|x\|_\infty$$

et il existe donc une constante k telle que $\|\cdot\| \leq k \|\cdot\|_\infty$.

Soit d'autre part $S = \{x \in E / \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Considérons l'application φ de S dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \|x\|$.

Pour tous x et y de S on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq k \|x - y\|_\infty$ ce qui assure la continuité de φ .

D'autre part E étant de dimension finie, S est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ (« Suites réelles et complexes », 2.2), et par conséquent φ est bornée dans S et atteint ses bornes. Il existe donc α et β dans S tels que $\|\alpha\| = m = \inf_{x \in S} \|x\|$ et

$\|\beta\| = M = \sup_{x \in S} \|x\|$. Comme α et β appartiennent à S on a $\|\alpha\|_\infty = \|\beta\|_\infty = 1$ donc $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ et m et M sont des réels strictement positifs.

Soit x un élément non nul de E ; $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ appartient à S donc $m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \leq M$ soit $m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty$, inégalité encore valable si $x = 0$, ce qui achève la démonstration.

Contre-exemple : on a vu au début du chapitre que dans $C([a; b]; \mathbf{K})$ les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Conséquences : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie :

- (i) E est complet;
- (ii) tout sous-espace vectoriel de E est fermé;
- (iii) les compacts de E sont les ensembles fermés bornés;
- (iv) toute application linéaire de E dans F , espace vectoriel normé quelconque, est continue.

Démonstration :

(i) En prenant une base de E on peut identifier E à $\mathbb{R}^n$. Le (i) résulte alors de ce que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet et que si un espace vectoriel normé est complet il le reste en remplaçant sa norme par une norme équivalente.

(ii) Un sous-espace vectoriel de E est complet d'après (i) donc fermé (1.1 propriété (ii)).

(iii) Idem, le résultat étant vrai dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

(iv) Soit f une application de E dans un espace vectoriel normé F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ on a $\|f(x)\| = \|f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| = \|x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)\| \leq k \|x\|_\infty$ avec $k = \|f(e_1)\| + \dots + \|f(e_n)\|$, ce qui assure la continuité de f (voir 4.3.1 (vii)).

4.2 Compacité des boules fermées

Théorème (F. Riesz) : Soit E un espace vectoriel normé. Alors :

les boules fermées sont compactes $\Leftrightarrow E$ est de dimension finie.

D'autre part les énoncés suivant sont équivalents :

(i) les fermés-bornés sont compacts; (ii) les boules fermées sont compactes; (iii) la boule unité est compacte; (iv) il existe une boule fermée de rayon $r > 0$ compacte.

(il suffit de montrer que (iv) implique (i). Soit $B(x_0, r)$ une boule fermée compacte et F est un ensemble fermé et borné de E . Alors F est inclus dans une boule fermée $B(0, R)$ de centre 0 et de rayon $R > 0$. Par l'application continue $x \mapsto R(x - x_0)/r$ l'image de $B(x_0, r)$ est $B(0, R)$ donc la boule $B(0, R)$ est compacte comme image d'un compact par une application continue (2.3, théorème 1). F étant un fermé inclus dans le compact $B(0, R)$ c'est donc un compact).

Démonstration du théorème de Riesz :

Condition suffisante : résulte du 4.1 « Conséquences », les boules fermées de E étant fermées et bornées.

Condition nécessaire :

Lemme : soit un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E distinct de E . Alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|x_0 - y\| \geq 1/2$ pour tout y de F .

démonstration du lemme : soit x appartenant à $E - F$ et $\delta = d(x, F)$, distance de x à F . Si $\delta = 0$, comme $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$, pour tout entier naturel non nul n , il existerait $y_n \in F$ tel que $0 \leq d(x, y_n) \leq 1/n$, donc la suite (y_n) tendrait vers x , d'où $x \in \overline{F}$, et comme $\overline{F} = F$ (car F est fermé) on aurait $x \in F$, ce qui n'est pas.

Ainsi $\delta > 0$ et il existe $y_0 \in F$ tel que $d(x, y_0) < 2\delta$. Posons $x_0 = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$.

On a donc $\|x_0\| = 1$ et pour tout y de F : $\|y - x_0\| = \left\| y - \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} \right\| = \frac{\|x - y_0 - \|x - y_0\| y\|}{\|x - y_0\|}$.

Comme $y_0 + \|x - y_0\| y \in F$ on a $\|x - y_0 - \|x - y_0\| y\| \geq \delta$ et $\|x - y_0\| < 2\delta$, d'où $\|y - x_0\| > \delta/2\delta = 1/2$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Fin de la démonstration du théorème : supposons E de dimension infinie. Soit $x_1 \in E$ de norme 1. $F_1 = \langle x_1 \rangle$ (sous-espace vectoriel engendré par x_1) étant fermé et distinct de E , il existe d'après le lemme $x_2 \in E$ de norme 1 tel que $\|x_2 - y\| > 1/2$, pour tout y de F_1 et en particulier $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. De même si $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ il existe x_3 de norme 1 tel que $\|x_3 - y\| > 1/2$ pour tout y de F_2 . Si x_k est construit pour $1 \leq k \leq n$, le sous-espace vectoriel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ est de dimension finie, fermé et distinct de E donc il existe x_{n+1} de norme 1 tel que $\|x_{n+1} - y\| > 1/2$ pour tout y de F_n . On construit ainsi par récurrence une suite $(x_p)_{p \geq 1}$ de vecteurs de E de norme 1 vérifiant $\|x_p - x_q\| > 1/2$ pour $p \neq q$. Par conséquent on ne peut extraire de cette suite aucune sous-suite convergente, donc la boule unité fermée de E n'est pas compacte, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarque : l'exercice 7 donne un exemple de boule fermée non compacte d'un espace vectoriel normé de dimension infinie.

4.3 Applications linéaires

4.3.1 Critères de continuité

Théorème : Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est continue en 0;
- (ii) u est continue dans E ;
- (iii) u est uniformément continue dans E ;
- (iv) u est lipschitzienne;
- (v) u est bornée sur la boule unité;
- (vi) u est bornée sur la sphère unité;
- (vii) il existe un réel $a > 0$ tel que : $\forall x \in E : \|u(x)\| \leq a\|x\|$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : u étant continue en 0 pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de E : ($\|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|u(x)\| \leq \varepsilon$). Pour tous x et y de E tels que $\|x - y\| \leq \varepsilon$ on a $\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq \varepsilon$, donc u est continue dans E , et même uniformément continue puisque α ne dépend que de ε .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : si u est continue dans E elle est continue en 0 donc u est uniformément continue dans E d'après la démonstration précédente.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : u étant continue il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|u(x)\| \leq 1$. Pour tout x non nul de E on a donc

$\left\| u\left(\frac{\alpha x}{\|x\|}\right) \right\| \leq 1$ soit $\|u(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$, inégalité valable aussi pour $x = 0$. Pour tous x et y de E on a donc :

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x - y\| \text{ et donc } u \text{ est lipschitzienne.}$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) : u étant lipschitzienne il existe $k > 0$ tel que pour tous x et y de E : $\|u(x) - u(y)\| \leq k\|x - y\|$. Pour tout x de la boule unité B de E on a donc $\|u(x)\| \leq k\|x\| \leq k$, donc u est bornée dans B .

(v) $\Rightarrow$ (vi) : évident.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) : u étant bornée sur la sphère unité S de E il existe un réel $a > 0$ tels que $\|u(x)\| \leq a$ pour tout x de S . Pour tout x de $E - \{0\}$ on a $x/\|x\| \in S$ donc $\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq a$ soit $\|u(x)\| \leq a\|x\|$, inégalité encore valable si $x = 0$.

(vii) $\Rightarrow$ (i) : évident.

D'après 4.1 si E est de dimension finie toute application linéaire de E dans F est continue. Ce n'est plus le cas si E n'est pas de dimension finie :

Exemple d'application linéaire non continue : Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels

muni de la norme $\|P\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$. La forme linéaire $P \mapsto P(3)$ n'est pas continue dans E car la suite $\left(\left(\frac{t}{2} \right)^n \right)$ de E

tend vers 0 mais $u(P_n) = \left(\frac{3}{2} \right)^n$ diverge.

Exercice 18

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe au moins une forme linéaire non continue.

Si f est une telle forme montrer que pour tout x de E $\|x\| = \|x\| + |f(x)|$ définit une norme non équivalente à $\|\cdot\|$.

(Cela prouve la réciproque du théorème du 4.1).

Exercice 19

Montrer que deux normes d'un espace vectoriel E sont topologiquement équivalentes ssi elles sont équivalentes (voir préliminaires).

4.3.2 L'espace vectoriel normé $L(E, F)$

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et notons $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F ; si $E = F$ on note $L(E)$ cet ensemble; si $F = \mathbf{K}$, $L(E, \mathbf{K})$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur E . On note E' cet ensemble, appelé dual topologique de E . Si E est de dimension finie toute forme linéaire est continue et donc le dual topologique de E s'identifie à son dual algébrique.

On munit $L(E, F)$ d'une norme pour en faire un espace vectoriel normé en posant pour $u \in L(E, F)$, $N(u) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$.

C'est une norme dans $L(E, F)$ (si $\|u\| = 0$, pour tout x non nul de E on a $u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$, donc $\frac{u(x)}{\|x\|} = 0$, soit $u(x) = 0$;

comme $u(0) = 0$, u est l'application linéaire nulle. Les autres propriétés de la norme sont faciles à vérifier).

On note encore $\|u\|$ la norme de u et on dit que cette norme est *subordonnée* (ou *induite*) par les normes de E et de F .

Exercice 20 : propriété de la norme de $L(E, F)$

Avec les notations précédentes montrer que pour tout u de $L(E, F)$ on a :

1°/ Pour tout x de E : $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$;

2°/ $\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \inf\{a > 0 / \forall x \in E, \|u(x)\| \leq a\|x\|\}$;

3°/ Si G est un espace vectoriel normé, pour tout v de $L(F, G)$ on a : $uv \in L(E, G)$ et $\|vu\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$;

4°/ $\|\text{Id}_E\| = 1$;

5°/ Interprétation géométrique de la norme d'une forme linéaire continue : soit f une forme linéaire continue de E . Montrer que :

$$\frac{1}{\|f\|} = \text{distance de l'origine } O \text{ à l'hyperplan d'équation } f(x) = 1.$$

Théorème : Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si F est un espace de Banach, $L(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite de Cauchy de $L(E, F)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p, \forall q \in \mathbb{N} : (q \text{ et } p \geq N \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon) \quad (*).$$

Pour x fixé dans E , (*) implique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p, \forall q \in \mathbb{N} : (q \text{ et } p \geq N \Rightarrow \|u_p(x) - u_q(x)\| \leq \varepsilon\|x\|) \quad (**),$$

donc la suite $(u_n(x))$ est de Cauchy dans F , donc converge. Désignons par $u(x)$ sa limite. On définit ainsi une application de E dans F qui est clairement linéaire.

En faisant tendre q vers l'infini dans (**) il vient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p, \forall q \in \mathbb{N} : (q \text{ et } p \geq N \Rightarrow \|u_p(x) - u(x)\| \leq \varepsilon\|x\|)$$

ou $\|u_p - u\| \leq \varepsilon$; donc la suite (u_n) converge vers u dans $L(E, F)$.

Exercice 21

Soit $E = F = \mathbb{C}^n$. On peut alors identifier $L(E)$ avec l'ensemble $M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1°/ Montrer que la norme de $M \in M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$ de $\mathbb{C}^n$ est définie par $\|M\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

Montrer que la norme de M_n subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{C}^n$ est définie par $\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

2°/ On munit $\mathbb{C}^n$ de sa norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$. Montrer que si la matrice M est autoadjointe alors sa norme subordonnée à $\|\cdot\|_2$ est égale à $\rho = \max\{|\lambda| / \lambda \text{ valeur propre de } M\}$ (rayon spectral de M).

Dans le cas général montrer que $\|M\| = \max\{\sqrt{|\lambda|} / \lambda \text{ valeur propre de } M * M\}$.

Montrer que pour tout M de $M_n(\mathbb{C})$ on a $\|M^*\| = \|M\|$.

Exercice 22

Soit $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ muni de la norme définie pour tout $M = ((a_{ij}))$ de $M_n(\mathbb{C})$ par $\|M\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|$.

1°/ Cette norme dérive-t-elle d'une norme de $\mathbb{C}^n$?

2°/ Montrer que l'application $M \mapsto \text{Tr}(M)$ est une forme linéaire continue de $M_n(\mathbb{C})$ et calculer sa norme.

Exercice 23

Soit $E = C([0; 1], \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme du sup. Montrer que les applications $f \mapsto f(0)$ et $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ sont des formes linéaires continues de normes 1.

Exercice 24

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\|P\| = \sup_i |a_i|$.

1°/ L'endomorphisme $P \mapsto P'$ (polynôme dérivé de P) est-il continu? Si oui calculer sa norme. Même question en remplaçant $\mathbb{C}[X]$ par $\mathbb{C}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

2°/ Soit a un complexe donné et soit f la forme linéaire de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(P) = P(a)$. Montrer que f est continue si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas montrer que $\|f\| = \frac{1}{1-|a|}$.

4.4 Espaces de Hilbert

Soit E un espace préhilbertien (i.e. un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire définie positive si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou une forme hermitienne définie positive si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$). On sait qu'alors $x \mapsto (x; x)^{1/2}$ est une norme dans E . Si E muni de cette norme est complet on dit que E est un *espace de Hilbert*.

Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel fermé non nul d'un espace de Hilbert E .

(i) Si $x \in E$ il existe un unique $x' \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - x'\|$ où $d(x, F)$ désigne la distance de x à F i.e $\inf_{y \in F} \|y - x\|$.

Notons $x' = p_F(x)$;

(ii) $x' = p_F(x)$ est caractérisé par $x' \in F$ et $x - x'$ est orthogonal à F ;

(iii) l'application p_F de E dans E est linéaire, continue et de norme 1;

(iv) $\text{Ker } p_F = F^\perp$.

p_F est donc la projection orthogonale sur F et x' est la meilleure approximation de x dans F (voir « Suite et série de fonctions, 3.4.1).

Démonstration du théorème :

(i) Soit $d = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|y - x\|$ la distance de x à F . On a donc $d^2 = \inf_{y \in F} \|y - x\|^2$ et pour tout entier naturel non nul n il existe $y_n \in F$ tel que $d^2 \leq \|y_n - x\|^2 \leq d^2 + 1/n$.

Par translation on peut se ramener au cas où $x = 0$ (F devient ainsi un sous-espace affine de E). On a ainsi $d^2 \leq \|y_n\|^2 \leq d^2 + 1/n$ (*) pour tout entier naturel non nul n .

Montrons que la suite (y_n) est de Cauchy. Rappelons que pour tous y et z de E on a l'identité de la médiane : $\|y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Pour tous entiers naturels non nuls p et q on a donc :

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2\|y_p\|^2 + 2\|y_q\|^2 - \|y_p + y_q\|^2, \text{ soit}$$

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2\|y_p\|^2 + 2\|y_q\|^2 - 4\left\|\frac{y_p + y_q}{2}\right\|^2.$$

Comme $\frac{y_p + y_q}{2} \in F$ on a $\frac{y_p + y_q}{2} \geq d$ et l'égalité précédente donne $\|y_p - y_q\|^2 \leq 2(d^2 + 1/p) + 2(d^2 + 1/q) - 4d^2$ soit

$\|y_p - y_q\|^2 \leq 2(1/p + 1/q)$, ce qui prouve que la suite (y_n) est de Cauchy dans E . Elle est donc convergente vers un point $x' \in E$. F étant fermé dans E , x' est de plus un élément de F .

En passant l'encadrement (*) à la limite il vient $\|x'\|^2 = d^2$ donc $\|x'\| = d$.

Si x'' est un autre point de E vérifiant $\|x''\| = d$ l'égalité de la médiane donne $\|x' - x''\|^2 = 2\|x'\|^2 + 2\|x''\|^2 - 4\left\|\frac{x' + x''}{2}\right\|^2$.

Or $\left\|\frac{x' + x''}{2}\right\| \geq d$ car $\frac{x' + x''}{2} \in F$ d'où $\|x' - x''\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$, soit $\|x' - x''\| = 0$, donc $x' = x''$, ce qui montre l'unicité de x' .

(ii) Ramenons nous par translation au cas où $x' = 0$ (F reste donc un sous-espace vectoriel de E). Pour tout y non nul de F on a $\|y - x\| \geq \|x\|$ soit $\|y - x\|^2 \geq \|x\|^2$ ce qui donne $\|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(y, x) \geq \|x\|^2$ ou $\|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(y, x) \geq 0$. En remplaçant y par $\lambda y \in F$ où λ est un réel > 0 et en simplifiant par λ on obtient $\lambda\|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(y, x) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En faisant tendre λ vers 0 on obtient $\operatorname{Re}(y, x) \leq 0$ pour tout y de F . En remplaçant y par $-y$ dans cette dernière inégalité on a $\operatorname{Re}(y, x) \geq 0$ donc $\operatorname{Re}(y, x) = 0$. En remplaçant y par iy dans cette égalité il vient $\operatorname{Re}(iy, x) = 0$, donc $\operatorname{Im}(y, x) = 0$ et par conséquent $(y, x) = 0$ pour tout y de F .

Réciproquement supposons que $(y, x) = 0$ pour tout y de F , la relation de Pythagore donne $\|y - x\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$, donc $d(x, F) = \|x - 0\|$ et $0 = p_F(x)$.

(iii) Pour x et y dans E posons $x' = p_F(x)$ et $y' = p_F(y)$. Pour tous scalaires α et β , $\alpha x' + \beta y'$ appartient à F et pour tout z de F on a $(\alpha x + \beta y - \alpha x' - \beta y', z) = \alpha(x - x', y) + \beta(y - y', z) = 0$ donc $\alpha x + \beta y - \alpha x' - \beta y'$ est orthogonal à F et d'après (ii) $\alpha x' + \beta y' = p_F(\alpha x + \beta y)$. p_F est donc un endomorphisme de E .

D'autre part d'après le théorème de Pythagore on a $\|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|x - x'\|^2 \geq \|x'\|^2$ donc $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$. L'application p_F est donc continue et de norme ≤ 1 . D'autre part si x appartient à F on a $p_F(x) = x$ donc $\|p_F(x)\| = \|x\|$ et $\|p_F\| \geq 1$ et par conséquent $\|p_F\| = 1$.

(iv) x appartient à $\operatorname{Ker} p_F$ ssi x est orthogonal à F d'après (ii) d'où le (iv).

Exercice 25

Avec les notations du théorème montrer que $F^{\perp\perp} = F$. Plus généralement si F est un sous-espace vectoriel quelconque de E on a $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

Exercice 26 : théorème de l'isomorphisme de Hilbert

Montrer que l'application de E dans son dual topologique E' qui à $x \in E$ associe la forme linéaire $(\cdot, x)$ est un isomorphisme isométrique anti-linéaire, bicontinu.

Exercices complémentaires

I Montrer que l'ensemble $GL(E)$ des application linéaires inversibles d'un espace vectoriel E est un ouvert de E dans les deux cas suivants :

1/ dans le cas où E est de dimension finie en utilisant le déterminant;

2/ dans le cas général en supposant que E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est complet.

II Soit E un espace vectoriel de dimension n . Montrer que l'ensemble des endomorphismes de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $L(E)$.

III Soit F une partie non vide d'un espace métrique E . Si x est un élément de E on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ la distance de x à F .

1° Montrer que pour tous x et y de E on a : $|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$.

Que peut-on en déduire pour l'application $x \mapsto d(x, F)$ de E dans $\mathbb{R}$?

2° Si F est fermé montrer que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

De façon générale montrer que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{F}$ (adhérence de F dans E).

IV **1°** Montrer que dans un espace métrique tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts et tout ouvert est union dénombrable de fermés (utiliser l'exercice précédent).

2° Si A et B sont deux fermés non vides et disjoints il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

V **Espaces $\ell^p(\mathbb{N})$.**

Soit p un réel de l'intervalle $]1, +\infty[$.

1° Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient (x_i) et (y_i) deux suites complexe. Démontrer l'inégalité :

$$\sum_{i \geq 0} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i \geq 0} |y_i|^q \right]^{1/q} \quad (\text{Inégalité de Hölder}).$$

2° Si $x = (x_i)$ est une suite complexe on pose $\|x\|_p = \left[\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right]^{1/p}$ (éventuellement égal à $+\infty$).

Montrer que pour toute suite complexe $y = (y_i)$ on a :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (\text{inégalité de Minkowski}).$$

3° On pose $\ell^p(\mathbb{N}) = \{x = (x_i) \in l(\mathbb{N}) / \sum_{i \geq 0} |x_i|^p < +\infty\}$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel et que

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right]^{1/p} \text{ définit une norme de cet espace.}$$

4° Montrer que $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

5° Montrer que $(\ell^p(\mathbb{N}))'$, dual topologique de $\ell^p(\mathbb{N})$, est isomorphe à $\ell^q(\mathbb{N})$ (indication : considérer l'application φ de $\ell^q(\mathbb{N})$ dans $(\ell^p(\mathbb{N}))'$ qui à (x_i) associe la forme linéaire $(y_i) \mapsto \sum_{i \geq 0} x_i y_i$: montrer que φ est bien définie, qu'elle est linéaire, continue, isométrique et bijective).

Remarque : 1/, 2/, 3/ et 4/ sont valables avec $p = 1$ et $q = \infty$ ($l^\infty(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des suites complexes bornées et il est muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$).

VI Montrer que $(l^1(\mathbb{N}))'$, dual topologique de $l^1(\mathbb{N})$, est isomorphe à $l^\infty(\mathbb{N})$.

VII Topologie de $M_K(n)$

Soit $M_K(n)$ l'ensemble des matrices carrées de type (n, n) à coefficients dans K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1°/ Montrer que l'application de $M_K(n)$ qui à M associe $\det(M)$ est continue. En déduire que l'application de $GL_K(n)$ dans $GL_K(n)$ qui à M associe M^{-1} est continue.

2°/ L'application de $M_K(n)$ dans $K[X]$ qui à M associe son polynôme caractéristique est-elle continue ?
Même question pour l'application de $M_K(n)$ dans $K[X]$ qui à M associe son polynôme minimal.

3°/ a/ Montrer que $GL_{\mathbb{C}}(n)$ est connexe par arcs. Montrer que $GL_{\mathbb{R}}(n)$ n'est pas connexe.

Montrer que l'ensemble des matrices de rang r de $M_{\mathbb{C}}(n)$ est connexe par arcs.

b/ Montrer que $GL_K(n)$ est dense dans $M_K(n)$

Applications : **a/** les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

b/ Quelle est le centre de $M_K(n)$? En déduire en utilisant la question 1/ celui de $GL_{\mathbb{C}}(n)$.

4°/ a/ Soit $D_{\mathbb{C}}(n)$ et $D'_{\mathbb{C}}(n)$ l'ensemble des matrices à coefficients complexes diagonalisables et des matrices ayant n valeurs propres distinctes deux à deux. Montrer que $D_{\mathbb{C}}(n)$ et $D'_{\mathbb{C}}(n)$ sont denses dans $M_{\mathbb{C}}(n)$.

b/ Montrer que l'intérieur de $D_{\mathbb{C}}(n)$ est $D'_{\mathbb{C}}(n)$.

Applications : **a/** Pour tout A de $M_{\mathbb{C}}(n)$ on a $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$

b/ Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton

c/ Pour tout A de $M_{\mathbb{C}}(n)$ on pose $C(A) = \{M \in M_{\mathbb{C}}(n) / AM = MA\}$ (commutateur de A). Montrer que si A est diagonalisable on a $\dim C(A) \geq n$. Montrer que l'ensemble $F = \{M \in M_{\mathbb{C}}(n) / \dim C(M) \geq n\}$ est un fermé de $M_{\mathbb{C}}(n)$ et en déduire que $F = M_{\mathbb{C}}(n)$ (Autrement dit, pour toute matrice A de $M_{\mathbb{C}}(n)$ on a $\dim C(A) \geq n$).

5°/ Soit $T_{\mathbb{R}}(n)$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_{\mathbb{R}}(n)$.

a/ Montrer que $T_{\mathbb{R}}(n)$ est un fermé de $M_{\mathbb{R}}(n)$.

b/ Montrer que $T_{\mathbb{R}}(n)$ est l'adhérence de $D_{\mathbb{R}}(n)$.

VIII Théorème spectral

Soit $M_{\mathbb{C}}(n)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n munit d'une norme induite par une norme de $\mathbb{C}^n$ (voir Chap. III, exercice complémentaire I). Pour $A \in M_{\mathbb{C}}(n)$ soit $\rho(A) = \max\{|\lambda| / \lambda \text{ valeur propre de } A\}$ (rayon spectral de A).

1/ Montrer que pour tout entier naturel non nul k on a : $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$.

Dans les deux questions suivantes on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$ (définie par $\|(x_i)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$). La norme

induite dans $M_{\mathbb{C}}(n)$ est alors définie par $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$ (voir l'exercice 21 de ce chapitre).

2/ Montrer que si A est diagonalisable on a $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

3/ Montrer en utilisant la décomposition $D + N$ (Chap. III, 1/5/) que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

4/ Etendre le résultat précédent à une norme quelconque de $M_{\mathbb{C}}(n)$.

IX Soit I un idéal de l'algèbre $E = C(E, \mathbb{R})$ des fonctions continues d'un espace métrique compact E dans $\mathbb{R}$.

1° Montrer que si I est distinct de E tous les éléments de I ont un zéro en commun (considérer $\bigcap_{f \in I} Z(f)$, où $Z(f)$ désigne l'ensemble des zéros de f , et raisonner par l'absurde).

2° En déduire que les idéaux maximaux de E sont de la forme $I_x = \{f \in E / f(x) = 0\}$ où x est un élément de E .

X L'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \text{ est-il complet ?}$$

XI **1°** Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Montrer que l'application de l'espace vectoriel quotient E/F dans $\mathbb{R}$ qui à $\bar{x}$ associe $\inf_{y \in \bar{x}} \|y\|$ est une norme sur E/F . Si de plus E est un espace de Banach, $(E/F, N)$ aussi.

2° Montrer qu'une forme linéaire f d'un espace vectoriel normé E est continue ssi son noyau $\text{Ker } f$ est fermé dans E .

XII Soit $A = \{(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}^*) / |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$ (« cube de Hilbert »). Montrer que A est un compact de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ (montrer que A est précompact et complet).

XIII Soit $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $[0, 1]$ muni de la distance d définie par $d((x_n), (y_n)) = \sum_{n \geq 0} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique complet.

En déduire que tout espace métrique compact est homéomorphe à un sous espace de $(E, \|\cdot\|)$.

XIV Soit C_0 l'ensemble des suites réelles tendant vers 0 et muni de la norme $\|(x_n)\| = \sup |x_n|$. Montrer que la forme linéaire φ de C_0 définie par $\varphi((x_n)) = \sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ est continue et que sa norme n'est pas atteinte (i.e il n'existe pas d'élément (x_n) de C_0 de norme 1 tel que $\|\varphi\| = \varphi((x_n))$).

XV Il n'existe pas d'applications linéaires continues u et v de E dans E (espace vectoriel normé) telles que $vo u - uov = \text{Id}_E$ (indication : montrer que pour tout entier naturel n on a $vo u^{n+1} - u^{n+1}ov = (n+1)u^n$ puis considérer l'application de $L(E)$ dans lui-même qui à f associe $vo f - fov$).

Chap. 6 : topologie, correction

des exercices.

Exercice 1

1°/ Puisque $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, cela résulte du (iii) de la propriété précédente.

2°/ Dire que (f_n) est une suite de Cauchy de $C([a, b], \mathbf{K})$ équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p \geq N, \forall q \geq N : \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon, \text{ ou :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall x \in [a, b] : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f (voir « Suite et séries de fonctions », 1.3.2). De plus f est continue et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ ou } \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Par conséquent (f_n) converge vers f dans E et donc E est complet.

3°/ Montrons par exemple que $\mathbf{l}^1(\mathbb{N})$ est complet. Soit $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbf{l}^1(\mathbb{N})$ c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p \geq N, \forall q \geq N : \|x^{(p)} - x^{(q)}\|_1 \leq \varepsilon \text{ soit :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p \geq N, \forall q \geq N : \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \varepsilon \quad (*).$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$. La relation précédente donne : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p \geq N, \forall q \geq N : |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \varepsilon$, donc la suite $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{K}$ donc convergente. Soit a_k sa limite.

Posons $s = (a_k)_k$ et montrons que $s \in \mathbf{l}^1(\mathbb{N})$. La relation (*) montre que pour tout entier M et tout entier $p \geq N$ on a :

$$\sum_{k=0}^M |x_k^{(p)} - x_k^{(N)}| \leq \varepsilon. \text{ En faisant tendre } p \text{ vers l'infini il vient } \sum_{k=0}^M |a_k - x_k^{(N)}| \leq \varepsilon, \text{ et } M \text{ étant un entier quelconque on obtient}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - x_k^{(N)}| \leq \varepsilon. \text{ On écrit alors :}$$

$$\sum_{k=0}^M |a_k| \leq \sum_{k=0}^M |a_k - x_k^{(N)}| + \sum_{k=0}^M |x_k^{(N)}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - x_k^{(N)}| + \|x^{(N)}\|_1 \leq \varepsilon + \|x^{(N)}\|_1.$$

M étant quelconque on a donc $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$ et par suite s appartient à $\mathbf{l}^1(\mathbb{N})$.

Montrons maintenant que la suite $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers s dans $\mathbf{l}^1(\mathbb{N})$. D'après (*) pour tout entier M et tous entiers

$$p \text{ et } q \geq N \text{ on a } \sum_{k=0}^M |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \varepsilon. \text{ En faisant tendre } q \text{ vers l'infini il vient } \sum_{k=0}^M |x_k^{(p)} - a_k| \leq \varepsilon. \text{ En faisant tendre } M \text{ vers}$$

l'infini on a donc $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^{(p)} - a_k| \leq \varepsilon$, soit $\|x^{(p)} - s\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout entier $p \geq N$, donc $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge bien vers s dans

$\mathbf{l}^1(\mathbb{N})$.

4°/ Montrons par exemple que $E = C([0, 1]; \mathbf{K})$ muni de la norme 1 n'est pas complet. Soit (f_n) la suite de fonctions de E définie par le graphique de f_n . Soit d'autre part la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2]$ et $g(x) = 0$ si $x \in]1/2, 1]$ (g n'est donc pas élément de E). On a $\int_0^1 |f_n(x) - g(x)| dx \rightarrow 0$ quand n tend vers

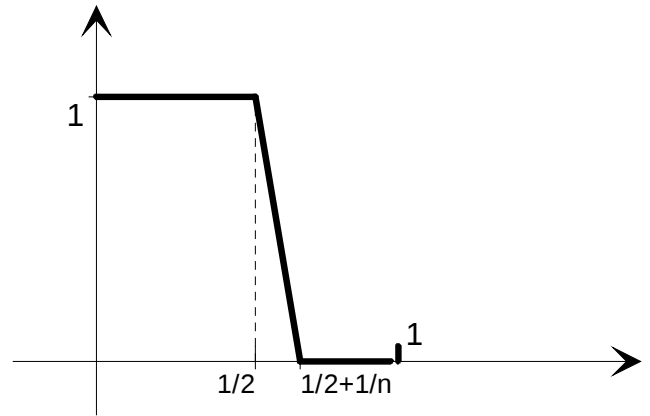
l'infini. On en déduit facilement, grâce à l'inégalité triangulaire pour les intégrales, que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Supposons que (f_n) converge dans cet espace vers f . On a écrit

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - f_n(x)| dx.$$

En faisant tendre n vers l'infini il vient $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$ et

comme f et g sont continues sur $[0, 1] - \{1/2\}$ on en déduit que

$f(x) = g(x)$ pour tout x de $[0, 1] - \{1/2\}$. Or cela est impossible car par hypothèse f est continue sur $[0, 1]$ et g ne peut pas se prolonger par continuité en $1/2$.



Exercice 2

Si α est point fixe de f alors $f(\alpha) = \alpha$ donc $f^n(\alpha) = \alpha$ et α est point fixe de f^n . Comme f^n est contractante elle a un point fixe unique β d'après le théorème précédent donc $\alpha = \beta$. Par conséquent f a au plus un point fixe.

D'autre part on a $f^n(\beta) = \beta$ soit $f^n(f(\beta)) = f(\beta)$. Cela montre que $f(\beta)$ est aussi point fixe de f^n et par unicité on conclut que $f(\beta) = \beta$ donc β est aussi point fixe de f .

Exercice 3

1°/ Soit $E = C([a, b]; \mathbf{R})$ muni de la norme du sup : c'est un espace de Banach (ex. 1, 2°/). Soit Φ l'application de E dans E qui à f associe $\lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$. Elle est bien définie car K étant une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$ l'application $x \mapsto \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$ est continue sur $[a, b]$ (voir « Suites et séries de fonctions », 2.4.3).

Pour tous f et g de E et tout x de $[a, b]$ on a $|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(x, y)| |f(y) - g(y)| dy \leq |\lambda| M(b-a) \|f - g\|_\infty$ où

$$M = \sup_{(x,y) \in [a,b]^2} |K(x, y)|, \text{ d'où : } \|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)\|_\infty \leq |\lambda| M(b-a) \|f - g\|_\infty,$$

et par conséquent Φ est contractante pour $|\lambda| M(b-a) < 1$, i.e. pour $|\lambda|$ suffisamment petit. On conclut par le théorème du point fixe.

2°/ Considérons l'application Ψ de E dans E qui à f associe $x \mapsto \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$.

Pour f et g de E et tout x de $[a, b]$ on a :

$$|\Psi(f)(x) - \Psi(g)(x)| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x, y)| |f(y) - g(y)| dy \leq |\lambda| M \|f - g\|_\infty (x - a).$$

De même $|\Psi^2(f)(x) - \Psi^2(g)(x)| \leq |\lambda| M \int_a^x |\Psi(f)(y) - \Psi(g)(y)| dy \leq |\lambda| M \int_a^x |\lambda| M \|f - g\|_\infty (y - a) dy$ d'après l'inégalité précédente soit :

$$|\Psi^2(f)(x) - \Psi^2(g)(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \|f - g\|_\infty \frac{(x - a)^2}{2!}.$$

Par récurrence on obtient pour tout entier n , tout x de $[a, b]$:

$$|\Psi^n(f)(x) - \Psi^n(g)(x)| \leq |\lambda|^n M^n \|f - g\|_\infty \frac{(x - a)^n}{n!}.$$

On en déduit $\|\Psi^n(f) - \Psi^n(g)\|_\infty \leq |\lambda|^n M^n \|f - g\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}$. Comme le deuxième membre tend vers 0 quand n tend vers

l'infini on a $|\lambda|^n M^n \|f - g\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!} < 1$ pour n assez grand donc Ψ est à itérée contractante et on conclut comme précédemment grâce à l'exercice 2.

3°/ Dire que $y \in C^1(I)$ est solution de (*) équivaut à dire que pour tout t de I on a :

$$y(t) = \int_{t_0}^t A(u)y(u)du + \int_{t_0}^t b(u)du + y_0,$$

Soit $[a, b]$ est inclus dans I ; on munit $\mathbb{C}^n$ d'une des normes définies dans les préliminaires et l'ensemble des matrice $M_n(\mathbb{C})$ d'une norme dérivée de cette norme voir 4.3.2). Alors $E = C([a, b], \mathbb{C}^n)$ muni de la norme du sup est un espace de Banach (voir exercice 12). Soit l'application Φ de E dans lui-même qui à f associe $t \mapsto \int_{t_0}^t A(u)f(u)du + h(t)$ avec

$h : t \mapsto \int_{t_0}^t b(u)du + y_0$. Comme au 2°/ on montre que Φ a une itérée contractante (en utilisant que

$\|A(u)f(u)\| \leq \|A(u)\| \cdot \|f(u)\|$ pour tout u dans $[a, b]$: voir exercice 20) donc l'équation a une unique solution sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans I d'où on déduit aisément le résultat.

Exercice 4

Il suffit de passer aux complémentaires dans la définition d'un espace compact en utilisant que le complémentaire d'un ouvert est un fermé et que le complémentaire d'un fermé est un ouvert.

Exercice 5

Supposons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. D'après l'exercice précédent il existe des entiers $n_1 < \dots < n_p$ tels que $\bigcap_{k=1}^p F_{n_k} = \emptyset$, soit

$F_{n_p} = \emptyset$ puisque la suite (F_n) est décroissante.

Exercice 6

Pour tout entier naturel non nul n on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon $\leq 1/n$ (E étant précompact). Soit D l'ensemble des centres de ces boules. D est un ensemble dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ et il existe $a_n \in D$ tel que $x \in B(a_n, \frac{1}{n})$, boule de centre a_n et de rayon $\frac{1}{n}$. On a donc $d(x, a_n) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ par conséquent D est dense dans E .

Exercice 7

Dans un espace métrique quelconque les boules fermées sont fermées et bornées, donc la boule unité B_1 de $\mathbb{1}^1(\mathbb{N})$ également. Soit e_p l'élément de B_1 dont tous les termes sont nuls sauf le p -ième qui vaut 1. On a pour $p \neq q$,

$\|e_p - e_q\|_1 = 2$ ce qui prouve qu'on ne peut extraire de la suite (e_p) aucune sous-suite convergente. Donc B_1 n'est pas compact.

Exercice 8

f étant une isométrie elle est continue et injective. Soit x un élément de E . Définissons la suite (x_n) de E par récurrence en posant $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. E étant compact on peut extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. f étant une isométrie on a pour tout entier naturel n : $d(f^{\varphi(n+1)}(x), f^{\varphi(n)}(x)) = d(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x), x_0)$. Mais $f^{\varphi(n+1)}(x) = x_{\varphi(n+1)}$, $f^{\varphi(n)}(x) = x_{\varphi(n)}$ et $\lim d(x_{\varphi(n+1)}, x_{\varphi(n)}) = 0$ donc $\lim d(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x), x_0) = 0$. Par suite tout élément de E est limite d'une suite de $f(E)$, donc $f(E)$ est dense dans E , i.e. $\overline{f(E)} = E$. D'autre part $f(E)$ est compact comme image d'un compact par une fonction continue, donc fermé dans E . Ainsi $\overline{f(E)} = f(E)$, d'où $f(E) = E$ et f est surjective.

Exercice 9

Même démonstration que le théorème du 3.1.2, « Suites et séries de fonctions »).

Exercice 10

Voir l'exercice 14 « Suites et séries de nombres réel ou complexes »).

Exercice 11

Soit K un compact convexe de E (on rappelle que convexe signifie que pour tous x et y de K et tout réel t de $[0, 1]$ on a $tx + (1 - t)y \in K$).

Soit $a \in K$ fixé et considérons, pour tout entier naturel non nul n , l'application f_n de K dans K définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n} f(a) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) \text{ (la définition est légitime car } K \text{ est convexe).}$$

Pour $(x, y) \in K \times K$ on a $\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|$. L'application f_n est donc contractante dans K . K étant compact est complet. D'après le théorème du point fixe f_n a un unique point fixe $x_n \in K$.

D'autre part pour tout x de K on a $\|f(x) - f_n(x)\| = \frac{1}{n} \|f(x) - f(a)\| \leq \frac{1}{n} \|f(x)\| + \frac{1}{n} \|f(a)\|$. Mais f est continue sur le compact K donc elle y est bornée. L'inégalité précédente montre alors que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f dans K .

Enfin K étant compact il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers $x \in K$. Montrons que x est point fixe de f . En remarquant que $x_{\varphi(n)} = f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})$ on écrit :

$$\|x - f(x)\| \leq \|x - x_{\varphi(n)}\| + \|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\| + \|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)\|.$$

En faisant tendre n vers l'infini il vient $\|x - f(x)\| = 0$, donc x est point fixe de f .

Exercice 12

La définition $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$ est légitime car E étant compact et f continue, $f(E)$ est borné dans F , et cela définit clairement une norme dans $C(E, F)$.

D'autre part dire que la suite (f_n) de $C(E, F)$ est de Cauchy équivaut à dire qu'elle vérifie le critère de Cauchy uniforme donc qu'elle converge vers $f \in C(E, F)$ uniformément, ce qui équivaut à dire qu'elle converge vers f au sens de la norme précédente.

Exercice 13

Soit R_n la réunion du rectangle ouvert $]0, 1/n[\times]0, 1[$ et des deux segments $[0, 1/n] \times \{0\}$ et $[0, 1/n] \times \{1\}$. Alors R_n est une suite décroissante de connexes dont l'intersection est constituée de la réunion des deux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ qui n'est pas connexe.

Exercice 14

1°/ Si f n'est pas strictement monotone sur I il existe x_1, x_2 , et x_3 dans I tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et par exemple $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Soit $y \in]f(x_3), f(x_2)[\subset]f(x_1), f(x_2)[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'image par f de $[x_1, x_2]$ est une intervalle contenant $f(x_1)$ et $f(x_2)$ donc contenant y , et par conséquent il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(c) = y$; comme $y \in]f(x_3), f(x_2)[$ il existe de même $c' \in]x_2, x_3[$ tel que $f(c') = y$. Comme $c \neq c'$ cela contredit l'injectivité de f .

Autre démonstration : Soit $T = \{(x, y) \in I \times I / x < y\}$ et ϕ l'application de T dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

Comme f est continue ϕ aussi; d'autre part T est convexe donc connexe. Par conséquent $\phi(T)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ i.e. un intervalle. Par hypothèses ϕ ne s'annule pas donc elle garde un signe constant sur T d'où le résultat.

2°/ Pour tous réels x et x' on a : $f(x) = f(x') \Rightarrow f \circ f(x) = f \circ f(x')$ soit $ax + b = ax' + b$ donc $x = x'$ car $a \neq 0$. f est donc injective; d'après le 1°/ f est strictement monotone donc $f \circ f$ est strictement croissante soit $a > 0$.

Exercice 15

L'application f de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(f((a, b)), |\cdot|)$ est un homéomorphisme (conséquence (ii) du théorème du 3.2) et f^{-1} de $(f((a, b)), |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}, \delta)$ est une isométrie par définition de δ , donc est aussi un homéomorphisme. Par suite l'identité de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}, \delta)$, composée des deux applications précédentes, est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}, \delta)$. Les distances δ et $|\cdot|$ de $\mathbb{R}$ sont donc topologiquement équivalentes.

Si f est bornée ces deux distances ne sont pas équivalentes car une est bornée et pas l'autre.

Exercice 16

1°/ Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ et considérons l'application g de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. On a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$, i.e $f(c) = c$.

Remarquons qu'en général il n'y a pas unicité du point fixe de f .

2°/ Si f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et si $a \in \mathbb{R}$ fixé alors l'application de $\mathbb{R} - \{a\}$ dans $\mathbb{R}^2 - \{f(a)\}$ qui à x associe $f(x)$ serait un homéomorphisme. Or cela est absurde car $\mathbb{R} - \{a\}$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^2 - \{f(a)\}$ l'est.

En effet l'application de $\mathbb{R}_+^* \times S^1$, où S^1 est le cercle unité, dans $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ qui à (r, u) associe ru est une application continue surjective donc $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ est connexe comme image d'un connexe $\mathbb{R}_+^* \times S^1$ (produit de deux connexes) par une application continue, donc $\mathbb{R}^2 - \{f(a)\}$, translaté de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, aussi.

De même on montrerait que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

3°/ $\mathbb{Q}$ étant dénombrable il en est de même de $f(\mathbb{Q})$. Comme $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ est aussi dénombrable donc $f(\mathbb{R})$ également. Or si f n'est pas constante $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point donc non dénombrable. Par conséquent f est constante.

Exercice 17

1°/ Soit E un espace métrique connexe par arcs. Si E n'est pas connexe il existe une application continue f non constante de E dans $\{0, 1\}$. Soient x et y des antécédents de 0 et de 1 respectivement. E étant connexe par arcs il existe un chemin γ joignant x et y . Alors $f \circ \gamma$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\{0, 1\}$ non constante, ce qui est absurde puisque $[0, 1]$ est connexe.

(on aurait pu utiliser aussi la définition d'un espace connexe).

2°/ Soit D un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé E et montrons que si D est connexe alors il est connexe par arcs. Soit $x_0 \in D$ un point fixé de D et D' l'ensemble des points de D qui peuvent être joints à x_0 par un chemin de D . Il suffit de montrer que $D' = D$ pour conclure que D est connexe par arcs.

Montrons que D' est un ouvert de D . Soit $x \in D'$. D étant ouvert il existe une boule ouverte B de centre x contenue dans D . Or tout élément de B peut être joint à x par un chemin de B donc de D (prendre par exemple le chemin $t \mapsto tx + (1-t)x$). Donc tout élément de B peut être joint à x_0 par un chemin de D i.e $B \subset D'$. Ainsi D' est bien un ouvert de D .

Montrons maintenant que D' est un fermé de D . Soit (y_n) une suite d'éléments de D' convergeant dans D vers l . D étant ouvert il existe une boule ouverte B de centre l de rayon ε contenue dans D . Comme la suite (y_n) converge vers l il existe un entier n tel que $x_n \in B$. On peut joindre x_n à x_0 par un chemin de D (car $x_n \in D'$) et on peut joindre l à x_n par un chemin de B (on peut prendre comme précédemment un segment de droite) et donc on peut joindre l à x_0 par un chemin de D . On a ainsi $l \in D'$ donc D' est un fermé de D .

Mais D étant connexe ses seules parties à la fois ouvertes et fermées sont D et $\emptyset$; comme $D' \neq \emptyset$, on a donc $D' = D$ et D est connexe par arcs.

Exercice 18

Soit $B = (e_i)_{i \in I}$ une base de E constituée de vecteurs normés et $(e_i)_{i \in N}$ un sous-famille de B . Soit la forme linéaire f définie par $f(e_{i_n}) = n$ et $f(e_j) = 0$ si j n'est pas égal à un i_n . Alors f n'est pas continue car elle n'est pas bornée sur la sphère unité.

Soit f une telle forme linéaire non continue, et posons pour tout x de E : $\|x\| = \|x\| + |f(x)|$. On vérifie facilement que c'est une norme de E . Si elle était équivalente à $\|\cdot\|$ il existerait une constante k telle que $\|x\| \leq k\|x\|$, soit, pour tout x de E , $|f(x)| \leq (k-1)\|x\|$, et donc f serait continue.

Exercice 19

On sait que deux normes équivalentes sont topologiquement équivalentes.

Réciproquement dire que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ d'un espace vectoriel normé E sont topologiquement équivalentes c'est dire que l'identité de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ est une application linéaire continue ainsi que sa réciproque donc il existe deux constantes strictement positives k et k' telles que $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leq k'\|x\|_2$ d'après le (vii) du théorème du 4.3.1 i.e les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 20

1°/ Pour tout x non nul de E , $x/\|x\|$ appartient à la boule unité de E donc $\|u(x/\|x\|)\| \leq \|u\|$ soit $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$, inégalité encore valable si $x = 0$.

2°/ Posons $M = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Comme la sphère unité est incluse dans la boule unité on a $M \leq \|u\|$. D'autre part pour tout

x non nul de la boule unité on a $\|u(x)\| = \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\| \leq M$; cette inégalité étant encore valable pour $x = 0$ on en déduit que $\|u\| \leq M$, d'où $M = \|u\|$.

Posons de même $M' = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Comme $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ on a $M' \geq \|u\|$. D'autre part pour tout x non nul de E on a $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \|u(y)\|$ (avec $y = x/\|x\|$ de norme 1) donc $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \|u\|$, soit $M' \leq \|u\|$, d'où $\|u\| = M'$.

Soit $A = \{a > 0 / \forall x \in E, \|u(x)\| \leq a\|x\|\}$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ non vide d'après le théorème du 4.3.1 (vii). On peut donc considérer $m = \inf A$. Comme $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$ pour tout x de E on a $m \leq \|u\|$.

Soit d'autre part $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ il existe $a \in A$ tel que $m \leq a \leq m + \varepsilon$. Pour tout x de la boule unité de E on a ainsi $\|u(x)\| \leq a\|x\| \leq (m + \varepsilon)$, donc $\|u\| \leq m + \varepsilon$, et $\varepsilon > 0$ étant quelconque on en déduit que $\|u\| \leq m$; d'où l'égalité.

3°/ Pour tout x de la boule unité de E on a $\|uv(x)\| \leq \|u\| \cdot \|v(x)\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|x\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, et en passant au sup sur $x \in B$ on obtient $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

4°/ Evident.

5°/ Soit $H = \{x \in E / f(x) = 1\}$ et $d = d(0, H) = \inf_{x \in H} \|x\|$. Pour tout x de H on a : $1 = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, donc $\|x\| \geq 1/\|f\|$, d'où $d \geq 1/\|f\|$.

Soit d'autre part $\varepsilon > 0$ tel que $\|f\| - \varepsilon > 0$. Il existe x appartenant à la sphère unité tel que $\|f\| - \varepsilon \leq |f(x)| \leq \|f\|$. Comme $x/f(x) \in H$ on a $\|x\|/|f(x)| \geq d$ soit $1/|f(x)| \geq d$. D'où $d \leq \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$. On en déduit $d \leq 1/\|f\|$. Finalement $d = 1/\|f\|$.

Exercice 21

1°/ Prenons dans $\mathbb{C}^n$ la norme $\|\cdot\|_1$. Si $M = (a_{ij}) \in M_n$ et si $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ on a :

$$\|MX\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \left(\sup_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \|X\|_1,$$

$$\text{donc } \|M\| \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

D'autre part soit e_j est le j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a $\|Me_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, et e_i appartenant à la boule unité on a donc $\|M\| \geq \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ pour tout j soit $\|M\| \geq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Par conséquent $\|M\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (maximum des sommes des valeurs absolues des éléments des colonnes de M).

Munissons $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Avec les notations précédentes on a $\|MX\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right|$
 $\leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj} x_j| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \|X\|_\infty$. On a donc $\|M\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$.

D'autre part pour i fixé dans $\{1, \dots, n\}$ soit X le vecteur dont la j -ième composante est égale à 1 si a_{ij} est ≥ 0 et -1 sinon. On a $\|MX\|_\infty \geq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Comme $\|X\|_\infty = 1$ on a par conséquent $\|M\| \geq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$ et

$\|M\| \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Finalement $\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximum des sommes des valeurs absolues des éléments des lignes de M).

2°/ Soit $\mathbb{C}^n$ muni de sa norme euclidienne canonique et soit M une matrice autoadjointe.

Elle se diagonalise dans une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$. Soit $\rho = \max\{|\lambda| / \lambda \text{ valeur propre de } M\}$. Pour tout

$X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$ on a $\|MX\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \cdot |x_k|^2 \cdot \|f_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \cdot |x_k|^2$ (où λ_k est valeur propre de M pour

le vecteur propre f_k). On a donc $\|MX\|^2 \leq \rho^2 \cdot \|X\|^2$, soit $\|M\| \leq \rho$. D'autre part si $\rho = |\lambda_p|$ on a $\|Mf_p\| = |\lambda_p|$ donc $\|M\| \geq \rho$. Finalement on a $\|M\| = \rho$.

Si M est une matrice quelconque alors la matrice M^*M est autoadjointe et on a pour tout X de $\mathbb{C}^n$ de norme 1 :

$$\|MX\|^2 = (MX; MX) = (M^*MX, X) \leq \|M^*MX\| \leq \|M^*M\| \leq \|M^*\| \cdot \|M\|.$$

En passant au sup sur X on en déduit que $\|M\|^2 \leq \|M^*M\| \leq \|M^*\| \cdot \|M\|$. Si $M \neq 0$ on a donc $\|M\| \leq \|M^*\|$. En remplaçant M par M^* il vient $\|M^*\| \leq \|M\|$ soit $\|M\| = \|M^*\|$ (relation valable aussi si $M = 0$).

Enfin $\|M^*M\| \leq \|M^*\| \cdot \|M\| = \|M\| \cdot \|M\| = \|M\|^2$. Finalement $\|M\|^2 = \|M^*M\| = \max\{|\lambda| / \lambda \text{ valeur propre de } M^*M\}$.

Exercice 22

1°/ On a $\|I_n\| = n$, donc cette norme ne dérive pas d'une norme de $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 1$ (exercice 20, 4°/).

2°/ Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$ on a $|\text{Tr}(M)| \leq \|M\|$ donc l'application trace est continue, et $\|\text{Tr}\| \leq 1$.

Soit A la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf un des termes de la diagonale qui vaut 1. On a $\|A\| = 1$ et $|\text{Tr}(A)| = 1$ donc $\|\text{Tr}\| \geq 1$. Par conséquent $\|\text{Tr}\| = 1$.

Exercice 23

L'application φ qui à f associe $f(0)$ est une forme linéaire et pour tout f de E on a $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty$. Donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq 1$. Si f est la fonction constante égale à 1 on a $\|f\|_\infty = 1$ et $|\varphi(f)| = 1$ donc $\|\varphi\| \geq 1$ soit $\|\varphi\| = 1$.

De même si ψ est la forme linéaire définie par $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$ on a $\left| \int_0^1 f(t)dt \right| \leq \|f\|_\infty$ et si f est la fonction constante égale à 1, $\psi(f) = 1$ donc $\|\psi\| = 1$.

Exercice 24

1°/ On a pour tout entier naturel n , $\|(X^n)'\| = n$, donc l'application $P \mapsto P'$ n'est pas continue sur la boule unité donc pas continue. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$. Pour tout $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\|P\| \leq 1$ on a $\|\varphi(P)\| = \sup_i |ia_i| \leq n$, donc φ est une application linéaire continue de norme $\leq n$. Si $Q = X^n$ on a $\|Q\| = 1$ et $\|\varphi(Q)\| = n$ donc $\|\varphi\| \geq 1$ et par conséquent $\|\varphi\| = n$.

2°/ Posons $a = re^{i\alpha}$ (avec $r \geq 0$) et supposons $r \geq 1$. Pour tout entier naturel n soit $P_n = \sum_{k=0}^n e^{-ik\alpha} X^k$; on a $\|P_n\| = 1$ et

$f(P_n) = \sum_{k=0}^n r^k \geq r^n$, donc f n'est pas bornée sur la boule unité donc f n'est pas continue pour $|a| = r \geq 1$.

Supposons $r < 1$. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on a $|f(P)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| r^k \leq \max_{k \geq 0} |a_k| \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \|P\| \leq \frac{1}{1-r} \|P\|$ (où n est le degré de P si $P \neq 0$), ce qui prouve que f est continue et $\|f\| \leq \frac{1}{1-r}$.

D'autre par posons $P_n = \sum_{k=0}^n e^{-ik\alpha} X^k$. On a $\|P_n\| = 1$ et $f(P_n) = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ ce qui montre que pour tout entier naturel

n on a $\|f\| \geq \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, et en passant à la limite quand n tend vers l'infini il vient $\|f\| \geq \frac{1}{1-r}$ et finalement :

$$\|f\| = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-|a|}.$$

Exercice 25

On a de façon immédiate $F \subset F^{\perp\perp}$.

Soit $x \in F^{\perp\perp}$ et x' son projeté orthogonal sur F . On a $x - x' \in F^\perp$. Pour tout z de $F^\perp$ on a $(x - x', z) = (x, z) - (x', z) = 0$ car chacun des termes est nul. On a donc $x - x' \in F^{\perp\perp}$. Par conséquent $x - x' \in F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$ soit $x = x'$ et $x \in F$. D'où $F = F^{\perp\perp}$.

Soit F est un sous-espace vectoriel quelconque de E . Si x et y appartiennent à $F^\perp$ pour tous scalaires α et β et tout z de F on a $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0$ donc $\alpha x + \beta y \in F^\perp$ et $F^\perp$ est ainsi un sous-espace vectoriel de E . D'autre part si (x_n) est une suite de $F^\perp$ convergente vers x , pour tout entier n et tout z de F on a $(x_n, z) = 0$, et en passant à la limite, compte tenu de la continuité du produit scalaire, il vient $(x, z) = 0$ donc $x \in F^\perp$ ce qui prouve que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E . De plus on montre facilement que si F est un sous-espace vectoriel de E il en est de même de $\overline{F}$.

Cela étant, comme $F \subset F^{\perp\perp}$, on a $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$ ($F^{\perp\perp}$ étant fermé dans E). D'autre part $F \subset \overline{F}$ donc $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$ puis $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}$, d'après l'étape précédente ($\overline{F}$ étant un sous-espace vectoriel fermé de E), et finalement :

$$\overline{F} = F^{\perp\perp}.$$

Exercice 26

Pour $x \in E$ soit φ_x la forme linéaire de E définie par $\varphi_x(y) = (y, x)$ pour tout y de E . On a $|\varphi_x(y)| = |(y, x)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc φ_x est continue et de norme $\leq \|x\|$. D'autre part si x est non nul et si $y = x/\|x\|$, on a $\varphi_x(y) = \|x\|$ et par conséquent $\|\varphi_x\| = \|x\|$, égalité encore valable si $x = 0$. L'application Ψ de E dans E' qui à x associe φ_x est donc bien définie de E dans E' et c'est une isométrie. Elle est donc injective et continue. Il est clair qu'elle est anti-linéaire. Montrons qu'elle est de plus surjective.

Soit donc $l \in E'$. Si l est nulle on a $l = \Psi(0)$.

Sinon cherchons $x \in E$ telle que $l = \Psi(x)$. Pour tout y de $\text{Ker } l$ on doit avoir $0 = (y, x)$ donc nécessairement $x \in (\text{Ker } l)^\perp$. Soit $F = \text{Ker } l$, sous-espace vectoriel de E fermé car l est continue. L'orthogonal $F^\perp$ de F n'est pas nul sinon $F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$ donc $F = E$ (d'après l'exercice 25) et l serait nulle. Soit donc $z \in F^\perp$, non nul, et posons $x = \alpha z$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Déterminons α de façon à ce que $l = \Psi(x)$. On a nécessairement $l(x) = l(\alpha z) = \alpha l(z)$

$$= (\alpha z, \alpha z) = \alpha \bar{\alpha} \|z\|^2, \text{ soit } \bar{\alpha} = l(z)/\|z\|^2. \text{ Posons } x = \frac{\overline{l(z)}}{\|z\|^2} z \text{ et montrons qu'on a bien } l = \Psi(x). \text{ Notons que } l(x) = \|x\|^2.$$

$$\text{Soit } y \in E. \text{ Posons } y' = y - \frac{l(y)}{\|x\|^2} x \text{ et } y'' = \frac{l(y)}{\|x\|^2} x. \text{ On a } l(y') = l(y) - l(y) \frac{l(x)}{\|x\|^2} = 0 \text{ donc } y' \in \text{Ker } l = F, \text{ i.e. } (y', x) = 0.$$

$$\text{On a donc } (y, x) = (y'', x) = \frac{l(y)}{\|x\|^2} (x, x) = l(y), \text{ et par conséquent } l = \Psi(x).$$

Finalement Ψ est bijective et sa bijection réciproque est continue puisque c'est une isométrie, ce qui achève la démonstration.

Correction des exercices complémentaires

I/ 1/ Une base de E étant choisie on peut identifier $L(E)$ à l'ensemble des matrices $M_n(K)$ à coefficients dans K . L'application déterminant de $M_n(K)$ dans K est continue car $\det(M)$ est un polynôme des coefficients de la matrice M . L'ensemble des matrices inversibles $GL_n(K)$ est alors un ouvert comme image réciproque de l'ouvert $K - \{0\}$ de K par l'application déterminant.

2/ Soit maintenant un espace vectoriel E de dimension quelconque muni d'une norme $\|\cdot\|$ et munissons $L(E)$ de la norme induite (voir 4.3.2). Soit $u \in L(E)$ tel que $\|u\| < 1$; montrons que $\text{Id}_E - u$ est inversible. Pour tout entier naturel k on a $\|u^k\| \leq \|u\|^k$ donc la série de terme général u^k est convergente en norme donc est convergente vers $v \in L(E)$ ($L(E)$ étant complet d'après le théorème du 4.3.2). D'autre part pour tout entier naturel k on a $(\text{Id}_E - u) \circ (\text{Id}_E + u + \dots + u^k) = \text{Id}_E - u^{k+1}$. En passant à la limite quand k tend vers $+\infty$ il vient $(\text{Id}_E - u) \circ v = \text{Id}_E$ (l'application de $L(E)$ dans lui-même qui à w associe $(\text{Id}_E - u) \circ w$ étant continue en vertu de l'inégalité

$\|(\text{Id} - u) \circ w\| \leq \|(\text{Id} - u)\| \|w\|$). De même on montre que $v \circ (\text{Id}_E - u) = \text{Id}_E$. Par conséquent $\text{Id}_E - u$ est inversible d'inverse v .

Soit maintenant $u \in GL(E)$ quelconque. Si $w \in L(E)$ on écrit : $u + w = u \circ (\text{Id}_E + u^{-1} \circ w)$. Or $\text{Id}_E + u^{-1} \circ w$ est inversible pour $\|u^{-1} \circ w\| < 1$; comme $\|u^{-1} \circ w\| \leq \|u^{-1}\| \cdot \|w\|$ alors $\text{Id}_E + u^{-1} \circ w$ est inversible pour $\|w\| < 1/\|u\| = r$, ainsi que $u + w$. Par conséquent la boule ouverte de $L(E)$ de centre u et de rayon r est incluse dans $GL(E)$ et donc est un ouvert de $L(E)$.

II/ Soit R_p l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p ($p \leq n$). Si $p = n$ alors $R_n = L(E)$ qui est fermé. Si $p < n$, on identifie $L(E)$ avec l'ensemble des matrices $M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par le choix d'une base. Une matrice M appartient à R_p ssi tous les déterminants des matrices extraites d'ordre $> p$ de M sont nuls. Si ces matrices extraites sont $M_1, \dots, M_q$ alors R_p est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application de $M_n(K)$ dans K qui à M associe

$$\sum_{k=1}^q |\det(M_k)| \quad (\text{cette application étant continue car } \det(M_k) \text{ est un polynôme des coefficients de } M).$$

III/ 1°/ Pour tous x et y de E et tout z de F on a : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, F)$, par définition de $d(x, F)$. En passant l'inégalité à l'inf pour $z \in F$ il vient : $d(x, F) \leq d(x, y) + d(y, F)$, soit $d(x, F) - d(y, F) \leq d(x, y)$. En échangeant les rôles de x et y on obtient soit $d(y, F) - d(x, F) \leq d(x, y)$, et donc :

$$|d(y, F) - d(x, F)| \leq d(x, y).$$

L'application $x \mapsto d(x, F)$ de E dans $\mathbb{R}$ est donc continue (lipschitzienne) dans $\mathbb{R}$.

2°/ Supposons que $d(x, F) = 0$. D'après la caractérisation de la borne inférieure il existe pour tout entier naturel non nul n un élément f_n de F tel que $0 \leq d(x, f_n) \leq 1/n$. La suite (f_n) converge donc vers x et comme F est fermé on a $x \in F$ (Chapitre 1, 2.1).

Réciproquement, si x appartient à F on a $d(x, F) \leq d(x, x) = 0$ donc $d(x, F) = 0$.

Si F est une partie quelconque et si $d(x, F) = 0$ on montre de même que x est limite d'une suite de F i.e. x appartient à $\overline{F}$.

Si x appartient à $\overline{F}$ pour tout entier naturel non nul n il existe un élément f_n de F tel que $0 \leq d(x, f_n) \leq 1/n$. On a donc $d(x, F) \leq 1/n$ d'où $d(x, F) = 0$.

IV/ 1°/ Soit F un fermé et posons pour tout entier naturel non nul n : $U_n = \{x \in E / d(x, F) < 1/n\}$. U_n est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]0; 1/n[$ par l'application continue $x \mapsto d(x, F)$ (voir exercice précédent). Comme $F = \{x \in E / d(x, F) = 0\}$ (idem) on a $F = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ d'où le résultat.

En passant au complémentaire on obtient que tout ouvert est union dénombrable de fermés.

2°/ Soient A et B sont deux fermés non vides et disjoints. D'après l'exercice précédent l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $d(x, A) - d(x, B)$ est continue donc les ensembles $U = \{x \in E / d(x, A) - d(x, B) < 0\}$ et $V = \{x \in E / d(x, A) - d(x, B) > 0\}$ sont des ouverts disjoints. De plus si $x \in A$ on a $d(x, A) = 0$ et $d(x, B) > 0$ (car $x \notin B$) et donc $x \in U$ et ainsi $A \subset U$. De même on a $B \subset V$.

V/ 1°/ **Inégalité de Hölder** : la concavité de la fonction $\ln$ donne pour a et b réels strictement positifs et $\lambda \in [0; 1]$:

$\lambda \ln(a) + (1 - \lambda) \ln(b) \leq \ln(\lambda a + (1 - \lambda)b)$ soit $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $p > 1$, on obtient

$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$. Pour $x > 0$ et $y > 0$ on déduit (en posant $a = x^p$ et $b = y^q$) : $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$, inégalité valable aussi si x ou y est nul.

Soit $X = (x_i)$, $Y = (y_i)$, N un entier naturel et posons $\|X\|_{p,N} = \left[\sum_{k=0}^N |x_k|^p \right]^{1/p}$ et $\|Y\|_{q,N} = \left[\sum_{k=0}^N |y_k|^q \right]^{1/q}$. Si $\|X\|_{p,N} \neq 0$ et

$\|Y\|_{q,N} \neq 0$ on pose pour $i \in \{0, \dots, N\}$ $x'_i = \frac{|x_i|}{\|X\|_{p,N}}$ et $y'_i = \frac{|y_i|}{\|Y\|_{q,N}}$. Pour tout i on a : $|x'_i y'_i| \leq \frac{x'^p_i}{p} + \frac{y'^q_i}{q}$, et en sommant

de $i = 0$ à N on obtient $\sum_{i=0}^N |x'_i y'_i| \leq \frac{\sum_{i=0}^N |x'_i|^p}{p} + \frac{\sum_{i=0}^N |y'_i|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit $\frac{\sum_{i=0}^N |x_i y_i|}{\|X\|_{p,N} \cdot \|Y\|_{q,N}} \leq 1$ ou $\sum_{i=0}^N |x_i y_i| \leq \|X\|_{p,N} \cdot \|Y\|_{q,N}$. Si

$\|X\|_{p,N} = 0$ ou $\|Y\|_{q,N} = 0$ cette inégalité est encore vérifiée. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient

$$\sum_{i \geq 0} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i \geq 0} |y_i|^q \right]^{1/q}.$$

2°/ **Inégalité de Minkowski** : on écrit pour tout entier i : $|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i + y_i|$, $|x_i + y_i| \leq |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i| + |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |y_i|$

soit en sommant de $0 = 1$ à N : $\|X + Y\|_{p,N}^p \leq \sum_{i=0}^N |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i| + \sum_{i=0}^N |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |y_i|$ et on applique l'inégalité de Hölder à

chaque terme du second membre ce qui donne : $\|X + Y\|_{p,N}^p \leq \left[\sum_{i=0}^N |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right]^{1/q} \cdot \|X\|_{p,N} + \left[\sum_{i=0}^N |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right]^{1/q} \cdot \|Y\|_{p,N}$

d'où en divisant les deux membres par $\left[\sum_{i=0}^N |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right]^{1/q} = \left[\sum_{i=0}^N |x_i + y_i|^p \right]^{1/q} = \|X + Y\|_{p,N}^{p/q}$ (vu que $p - p/q = 1$) :

$$\|X + Y\|_{p,N} \leq \|X\|_{p,N} + \|Y\|_{p,N} \text{ (inégalité valable aussi si } \|X + Y\|_{p,N}^{p/q} = 0 \text{)}.$$

On obtient l'inégalité de Minkowski en faisant tendre N vers $+\infty$.

3°/ Il est clair que si (x_i) appartient à $l^p(\mathbb{N})$ alors $\lambda(x_i)$ aussi pour tout λ complexe. L'inégalité de Minkowski montre que si (x_i) et (y_i) appartiennent à $l^p(\mathbb{N})$ alors $(x_i) + (y_i)$ aussi, donc $l^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\|_p$ est une norme de $l^p(\mathbb{N})$.

4°/ On procède comme pour démontrer que $l^1(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel de Banach (exercice 1 du chapitre).

Soit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^p(\mathbb{N})$ c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall r \geq N, \forall s \geq N : \|x^{(r)} - x^{(s)}\|_p \leq \varepsilon \text{ soit :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall r \geq N, \forall s \geq N : \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^{(r)} - x_k^{(s)}|^p \leq \varepsilon^p \quad (*).$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$. La relation précédente implique :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall r \geq N, \forall s \geq N : |x_k^{(r)} - x_k^{(s)}| \leq \varepsilon$, donc la suite $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc convergente. Soit a_k sa limite.

Posons $u = (a_k)_k$ et montrons que $u \in l^p(\mathbb{N})$. La relation (*) montre que pour tout entier M et tout entier $r \geq N$ on a :

$$\sum_{k=0}^M |x_k^{(r)} - x_k^{(N)}|^p \leq \varepsilon^p. \text{ En faisant tendre } r \text{ vers l'infini il vient } \sum_{k=0}^M |a_k - x_k^{(N)}|^p \leq \varepsilon^p, \text{ et } M \text{ étant un entier quelconque on}$$

obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - x_k^{(N)}|^p \leq \varepsilon^p$. On écrit alors, d'après l'inégalité de Minkowski :

$$\left[\sum_{k=0}^M |a_k|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=0}^M |a_k - x_k^{(N)}|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=0}^M |x_k^{(N)}|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k - x_k^{(N)}|^p \right]^{1/p} + \|x^{(N)}\|_p \leq \varepsilon + \|x^{(N)}\|_p.$$

M étant quelconque on a donc $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p < +\infty$ et ainsi la suite $u = (a_k)_k$ appartient à $l^p(\mathbb{N})$.

Montrons maintenant que la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $l^p(\mathbb{N})$. D'après (*) pour tout entier M et tous entiers r

et $s \geq N$ on a $\sum_{k=0}^M |x_k^{(r)} - x_k^{(s)}|^p \leq \varepsilon^p$. En faisant tendre s vers l'infini il vient $\sum_{k=0}^M |x_k^{(r)} - a_k|^p \leq \varepsilon^p$. En faisant tendre M

vers l'infini on a donc $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^{(r)} - a_k|^p \leq \varepsilon^p$, soit :

$$\|x^{(r)} - u\|_p \leq \varepsilon \text{ pour tout entier } r \geq N, \text{ donc } (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge bien vers } u \text{ dans } l^p(\mathbb{N}).$$

5°/ Pour $x = (x_i)$ appartenant à $l^q(\mathbb{N})$ et $y = (y_i)$ à $l^p(\mathbb{N})$ l'inégalité de Hölder montre que la série de terme général $x_i y_i$ est absolument convergente et $|\varphi(x)(y)| \leq \|x\|_q \|y\|_p$. Par conséquent la forme linéaire $\varphi(x)$ est continue et $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|_q$ ($(l^p(\mathbb{N}))'$ est muni de la norme induite par $\|\cdot\|_p$) et donc l'application φ est bien définie.

Montrons que pour tout $(x) \in l^q(\mathbb{N})$ on a $\|\varphi(x)\| = \|x\|_q$ ce qui montrera que φ est une isométrie. Supposons $(x) \neq 0$ et posons pour tout entier naturel $i : y_i = \overline{x_i} \cdot |x_i|^{q-2}$ si $x_i \neq 0$ et 0 sinon. On a $|y_i|^p = |x_i|^{p(q-1)} = |x_i|^q$, donc $y = (y_i)$ appartient à $l^p(\mathbb{N})$. On a alors : $\varphi(x)(y) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ x_k \neq 0}} x_k \cdot \overline{x_k} \cdot |x_k|^{q-2} = \sum_{k \geq 0} |x_k|^q = \|x\|_q^q$. On a donc, par définition de la norme induite :

$$\|\varphi(x)\| \geq \frac{\|x\|_q^q}{\|y\|_p} = \frac{\|x\|_q^q}{\left[\sum_{k \geq 0} |x_k|^q \right]^{1/p}} = \frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_q^{q/p}} = \|x\|_q^{q - q/p} = \|x\|_q \text{ (car } q - q/p = 1) \text{ et par conséquent on a bien } \|\varphi(x)\| = \|x\|_q$$

pour tout (x) appartenant à $l^q(\mathbb{N})$.

φ étant une isométrie elle est donc continue et injective. Il reste à prouver qu'elle est surjective.

Soit donc f un élément de $(l^p(\mathbb{N}))'$. Soit (e_i) la suite complexe dont tous les termes sont nuls sauf le i -ième qui vaut 1. Posons $x_i = f(e_i)$ pour tout entier naturel i .

f étant continue il existe une constante réelle C telle que $|f(y)| \leq C \cdot \|y\|_p$ pour tout y de $l^p(\mathbb{N})$.

Soit N un entier naturel et posons : $y_i = \overline{x_i} \cdot |x_i|^{q-2}$ si $x_i \neq 0$ et $y_i = 0$ si $x_i = 0$ ou $i > N$. Soit $y_N = (y_i)$. On a

$$f(y_N) = \sum_{k=0}^N y_k f(e_k) = \sum_{\substack{k=0 \\ x_k \neq 0}}^N \overline{x_k} \cdot |x_k|^{q-2} \cdot x_k = \sum_{k=0}^N |x_k|^q \leq C \cdot \left[\sum_{k=0}^N |x_k|^{p(q-1)} \right]^{1/p} = C \cdot \left[\sum_{k=0}^N |x_k|^q \right]^{1/p}, \text{ d'où :}$$

$$\left[\sum_{k=0}^N |x_k|^q \right]^{1-1/p} \leq C \text{ ou } \left[\sum_{k=0}^N |x_k|^q \right] \leq C^q. \text{ L'entier } N \text{ étant quelconque } x = (x_i) \text{ appartient à } l^q(\mathbb{N}) \text{ et comme}$$

précédemment on a : $y = (y_i) \in l^p(\mathbb{N})$.

Mais pour tout entier N on a $f(y_N) = \sum_{k=0}^N x_k y_k$. Comme $\|y - y_N\|_p^p = \left[\sum_{k>N} |y_k|^p \right]$ tend vers 0 avec N (reste d'une série convergente) on a y_N tend vers y dans $l^p(\mathbb{N})$ avec N . En faisant tendre N vers l'infini dans l'égalité $f(y_N) = \sum_{k=0}^N x_k y_k$ il vient, en vertu de la continuité de f : $f(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k = \varphi(x)(y)$ et $f = \varphi(x)$, ce qui achève la démonstration.

VI. On reprend la démonstration de l'exercice précédent. Soit $x = (x_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$ et soit $\varphi(x)$ la forme linéaire définie par : $(y_i) \mapsto \sum_{i \geq 0} x_i y_i$. Si (y_n) appartient à $l^1(\mathbb{N})$ on a immédiatement

$\left| \sum_{i \geq 0} x_i y_i \right| \leq \sum_{i \geq 0} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i \geq 0} |y_i| \right) \|x\|_\infty = \|y\|_1 \cdot \|x\|_\infty$ ce qui prouve que $\varphi(x)$ est une forme linéaire continue de $l^1(\mathbb{N})$ (i.e. appartient à $(l^1(\mathbb{N}))'$ et que $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|_\infty$).

Soit d'autre part la suite $e^{(i)}$ dont tous les termes sont nuls sauf le i -ième qui vaut 1. On a $\varphi(x)(e^{(i)}) = x_i$. Comme $\|e^{(i)}\|_1 = 1$ on a donc $\|\varphi(x)\| \geq |x_i|$, pour tout entier naturel et donc $\|\varphi(x)\| \geq \|x\|_\infty$. Finalement $\|\varphi(x)\| = \|x\|_\infty$ et ainsi φ est une isométrie, donc une injection, de $l^\infty(\mathbb{N})$ dans $(l^1(\mathbb{N}))'$.

Il reste à montrer que φ est surjective. Soit donc $f \in (l^1(\mathbb{N}))'$ et, avec la notation précédente, posons $x_i = f(e^{(i)})$ pour tout entier naturel i . f étant une forme linéaire continue de $l^1(\mathbb{N})$ il existe une constante C telle que pour tout y de $l^1(\mathbb{N})$: $|f(y)| \leq C \|y\|_1$. Pour tout i on a donc $|x_i| = |f(e^{(i)})| \leq C$ et ainsi la suite $x = (x_n)$ appartient à $l^\infty(\mathbb{N})$.

Soient $y = (y_n) \in l^1(\mathbb{N})$, N un entier naturel et la suite $y^{(N)}$ définie par $y_i^{(N)} = y_i$ si $i \in N$ et $y_i^{(N)} = 0$ si $i > N$. Pour tout entier N on a $f(y^{(N)}) = f\left(\sum_{i=0}^N y_i e^{(i)}\right) = \sum_{k=0}^N x_k y_k$. Mais $\|y^{(N)} - y\|_1 = \left| \sum_{i \geq N+1} y_i \right| \leq \sum_{i \geq N+1} |y_i|$ qui tend vers 0 avec N (reste d'une série convergente), donc $y^{(N)}$ tend vers y avec N dans $l^1(\mathbb{N})$.

En faisant tendre N vers l'infini dans l'égalité $f(y^{(N)}) = \sum_{k=0}^N x_k y_k$ on obtient, en vertu de la continuité de f :

$f(y) = \sum_{i \geq 0} x_i y_i = \varphi(x)(y)$, i.e. $f = \varphi(x)$ ce qui achève la démonstration.

VII/ Topologie de $M_K(n)$

1°/ Le déterminant d'une matrice est un polynôme en les coefficients de la matrice donc l'application $M \mapsto \det(M)$ est continue. Si M est inversible on a $M^{-1} = (\det M)^{-1} \cdot (\text{Com} M)$ et les coefficients de la comatrice $\text{Com} M$ de M sont des polynômes en les coefficients de la matrice M donc $M \mapsto \text{Com} M$ est continue donc $M \mapsto M^{-1}$ aussi.

2°/ L'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue car les coefficients du polynôme $\det(M - XI)$ sont des polynômes en les coefficients de la matrice.

La matrice D_k diagonale dont le i ème coefficient de la diagonale vaut i/k a n valeurs propres distinctes, donc son polynôme minimal μ_k est $\prod_{i=1}^n \left(X - \frac{i}{k} \right)$. Or D_k tend vers 0_n dont le polynôme minimal est X qui ne peut être limite de μ_k pour $n \geq 2$ (car le terme dominant de μ_k est X^n). Par conséquent l'application qui à une matrice associe son polynôme minimal n'est pas continue dans $M_K(n)$.

3°/ **a/** Soient A et B deux éléments de $GL_C(n)$. L'application $z \mapsto \det(zB + (1-z)A)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction polynôme n'admettant pas 0 ou 1 pour racine. Soient $a_1, \dots, a_p$ ses racines complexes. L'ensemble $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_p\}$ étant connexe par arcs il existe un chemin γ de $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_p\}$ joignant 0 à 1. Alors $t \mapsto \det(\gamma(t)B + (1-\gamma(t))A)$ est un chemin de $GL_C(n)$ joignant A à B donc $GL_C(n)$ est connexe par arcs (donc connexe).

$GL_R(n)$ n'est pas connexe : en effet les ensembles $G^+ = \{A \in GL_R(n) / \det(A) > 0\}$ et $G^- = \{A \in GL_R(n) / \det(A) < 0\}$ sont deux ouverts de $GL_R(n)$ (comme images réciproques de $\mathbb{R}^{+*}$ et de $\mathbb{R}^{-*}$ respectivement par l'application déterminant), non vides, disjoints dont la réunion est $GL_R(n)$.

Montrons que l'ensemble R des matrices de rang r est connexe par arcs dans $M_C(n)$. Une matrice A est de rang r ssi elle est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r est la matrice identité d'ordre r . Il existe donc P et Q appartenant à

$GL_C(n)$ telles que $A = PJ_rQ$. D'après la connexité de $GL_C(n)$ il existe deux chemins $t \mapsto P_t$ et $t \mapsto Q_t$ joignant P à I_n et Q à I_n respectivement. Alors $t \mapsto P_t J_r Q_t$ est un chemin de R joignant A à J_r . Il s'ensuit que l'on peut connecter deux matrices quelconques de rang r dans R .

b/ Soit $A \in M_K(n)$. L'application $x \mapsto \det(A - xI_n)$ est une fonction polynôme : si 0 en est une racine celle-ci est isolée donc pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand $\det(A - \frac{1}{k}I_n)$ est non nul donc $(A - \frac{1}{k}I_n)$ est une suite de $GL_K(n)$ qui converge vers A et donc $GL_K(n)$ est dense dans $M_K(n)$.

Applications : a/ Supposons A inversible. On écrit : $AB - XI = A(BA - XI)A^{-1}$ d'où $\chi_{AB}(X) = \det(AB - XI) = \det(A(BA - XI)A^{-1}) = \det(BA - XI) = \chi_{BA}(X)$. Dans le cas général soit (A_k) une suite de $GL_C(n)$ convergeant vers A et pour tout entier k on a $\det(BA_k - XI) = \det(A_k B - XI)$ soit, par passage à la limite, $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$ compte tenu de la continuité du déterminant et la multiplication matricielle.

b/ Soit A appartenant au centre $Z(M_K(n))$ de $M_K(n)$: pour tout $M \in M_K(n)$ on a donc $AM = MA$. Soit $X \in K^n$ et P_X la matrice d'une projection sur X . On a $AP_X X = P_X AX$ soit $AX = P_X AX$, donc AX est vecteur invariant de P_X donc AX est colinéaire X : $\exists \lambda_X \in K / AX = \lambda_X X$. Si $Y \in K^n$ est non colinéaire avec X on a : $A(X + Y) = \lambda_{X+Y}(X + Y)$ d'une part et $AX + AY = \lambda_X X + \lambda_Y Y$ d'autre part, donc $\lambda_X = \lambda_Y = \lambda_{X+Y}$. Si X et Y sont non nuls et colinéaires il existe par exemple $\alpha \in K$ tel que $Y = \alpha X$ on a : $AY = \lambda_Y Y$ et d'autre part $AY = \alpha AX = \alpha \lambda_X X = \lambda_X \alpha X = \lambda_X Y$ donc $\lambda_X = \lambda_Y$. Il existe donc une constante λ telle que pour tout $Y \in K^n - \{0\}$ on a $AY = \lambda Y$, relation valable aussi si $Y = 0$. Finalement $Z(M_K(n)) \subset \{\lambda I_n / \lambda \in K\}$ et l'inclusion inverse est triviale.

Soit maintenant A appartenant au centre $Z(GL_K(n))$ de $GL_K(n)$ et $M \in M_K(n)$. Il existe une suite (M_k) de $GL_K(n)$ convergeant vers M et pour tout k on a : $AM_k = M_k A$, et en passant à la limite on obtient $AM = MA$. A appartient donc au centre de $M_K(n)$: il existe donc une constante λ telle que $A = \lambda I_n$ et comme A est inversible on a $\lambda \neq 0$. D'où $Z(GL_K(n)) \subset \{\lambda I_n / \lambda \in K^*\}$ et l'inclusion inverse est triviale.

4°/ a/ Soit A appartenant à $M_C(n)$. A est trigonalisable donc il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$, matrice triangulaire donc les termes de la diagonale valent λ_i . Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit T_k la matrice triangulaire obtenue à partir de T en remplaçant le terme d'indice (i, i) par $\lambda_i + \frac{i}{k}$. Pour k assez grand les termes de la diagonale de T_k sont distincts deux à deux, donc T_k a n valeurs propres distinctes deux à deux i.e. appartient à $D'_C(n)$. Comme $T_k \rightarrow T$, alors $P^{-1}T_k P \rightarrow P^{-1}TP = A$, donc $D'_C(n)$ est dense dans $M_C(n)$. D'autre part $D_C(n)$ est inclus dans $D'_C(n)$ donc $D'_C(n)$ est aussi dense dans $M_C(n)$.

b/ Un polynôme P n'a que des racines simples ssi le résultant $\text{rés}(P, P')$ de P et de P' est non nul (voir "Anneaux et Corps", exercice complémentaire XIII/). Le résultant de P et de P' étant continu (c'est un polynôme en les coefficients de P) l'ensemble $\mathcal{I}$ des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ n'ayant que des racines simples est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$ (comme image réciproque de $\mathbb{C}^*$ par l'application résultant). Si χ est l'application de $M_C(n)$ qui à M associe son polynôme caractéristique alors $D'_C(n) = \chi^{-1}(\mathcal{I})$ donc $D'_C(n)$ est un ouvert de $M_C(n)$.

Par définition de l'intérieur d'un ensemble (plus grand ouvert contenu dans l'ensemble) on a donc $D'_C(n) \subset \overset{\circ}{D}_C$.

Pour démontrer l'inclusion inverse supposons qu'il existe une matrice M appartenant à l'intérieur $\overset{\circ}{D}_C$ de D_C et dont le

polynôme caractéristique a une racine multiple. M est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Soit

$\Delta_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1/k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $D_k = \begin{pmatrix} \Delta_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Le polynôme minimal de D_k est un multiple de celui de Δ_k , c'est à dire

$(X - \lambda)^2$. La matrice D_k n'est pas diagonalisable (car son polynôme minimal a une racine multiple) et $\lim D_k = D$. Si $M = PDP^{-1}$ alors la suite de matrices $M_k = PD_kP^{-1}$ converge vers M . Mais comme M appartient à l'intérieur de D_C alors M_k est diagonalisable pour k assez grand ce qui n'est pas puisque D_k n'est pas diagonalisable. Par conséquent on a bien $D'_C(n) = \overset{\circ}{D}_C$.

Applications : a/ Si $A = \text{Diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ on a $e^A = \text{Diag}[e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}]$ donc $\det(e^A) = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{Tr}A}$. Si $A \in M_C(n)$ est quelconque il existe une suite (A_k) diagonalisables convergeant vers A . Pour tout k on a $\det(e^{A_k}) = e^{\text{Tr}A_k}$. En passant à la limite quand k tend vers l'infini on obtient $\det(e^A) = e^{\text{Tr}A}$ vu la continuité du déterminant et de la trace.

b/ Si A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors son polynôme caractéristique est $\chi(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ et si e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ on a $\chi(A)e_i = 0$ car $Ae_i - \lambda_i e_i = \lambda_i e_i - \lambda_i e_i = 0$, donc $\chi(A) = 0$. Si $A \in M_C(n)$ et si (A_k) est une suite de matrices diagonalisables convergeant vers A on a $\chi(A_k) = 0$ pour tout k (où $\chi(A_k)$ est le polynôme caractéristique de A_k). Comme (A_k) converge vers A alors on a $\chi(A) = 0$ par passage à la limite vu la continuité de l'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique (d'après 2/).

c/ Il est clair que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_K(n)$. Si A est diagonalisable il existe une matrice inversible P et une matrice D diagonale telle que $A = P^{-1}DP$. On a : $M \in C(A)$ ssi $P^{-1}DPM = M P^{-1}DP$ soit $D(PMP^{-1}) = (PMP^{-1})D$. Toute matrice M telle que $PMP^{-1} = \Delta$ soit diagonale vérifie cette relation donc $C(A)$ contient le sous-espace vectoriel $\{P^{-1}\Delta P / \Delta \text{ diagonale}\}$ de $M_K(n)$. Comme le sous-espace vectoriel des matrices diagonales est de dimension n on en déduit que $\dim\{P^{-1}\Delta P / \Delta \text{ diagonale}\} = n$ et par conséquent $\dim C(A) \geq n$.

D'autre part soit φ_M l'endomorphisme $M_C(n)$ défini par $\varphi_M(X) = MX - XM$. On a $C(M) = \text{Ker } \varphi_M$ et par conséquent on a $F = \{M \in M_C(n) / \dim C(A) \geq n\} = \{M \in M_C(n) / \text{rg } \varphi_M \leq n^2 - n\}$. D'après l'exercice complémentaire II/ F est un fermé de $M_K(n)$. Mais F contient $D_C(n)$ qui est dense dans $M_K(n)$, donc $F = M_K(n)$.

5°/ a/ Une matrice appartient à $T_R(n)$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.

Pour M appartenant à $T_R(n)$ posons $\theta(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de M comptées avec leur ordre de multiplicité. Prenons dans $\mathbb{R}^n$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ et dans $M_R(n)$ la norme induite. On a alors

$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ (voir exercice 21 du cours) et donc on a, pour tout M de $T_R(n)$ on a :

$$\|\theta(M)\|_\infty = \rho(M) \leq \|M\| \text{ (où } \rho(M) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \text{)}.$$

Soit (T_k) une suite de $T_R(n)$ convergeant vers T appartenant à $M_R(n)$. Une suite convergente étant bornée, l'inégalité précédente prouve que la suite $\theta(T_k)$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$ et donc on peut en extraire une sous-suite convergente $\theta(T_{\varphi(k)})$ convergeant vers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

D'autre part le polynôme caractéristique de $\kappa(T_{\varphi(k)})$ converge vers celui $\kappa(T)$ (voir 2°/) et par conséquent les coefficients de $\kappa(T_{\varphi(k)})$ convergent vers ceux de $\kappa(T)$. Les relations entre coefficients et racine d'un polynôme montrent

alors que $\theta(T_{\varphi(k)})$ converge vers $\theta(T)$ donc $\theta(T) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Ainsi $\kappa(T) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Le polynôme

caractéristique de T est scindé dans $\mathbb{R}$, donc T est diagonalisable.

On a donc prouvé que $T_R(n)$ est un fermé de $M_R(n)$.

b/ On a $D_R(n) \subset T_R(n)$ qui est fermé donc $\overline{D_R(n)} \subset T_R(n)$. D'autre part on montre comme en 4/ a/ que toute matrice trigonalisable dans $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$, donc on a l'inclusion inverse et finalement $\overline{D_R(n)} = T_R(n)$.

VIII Théorème spectral :

1/ Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(A) = \max\{|\mu| / \mu \text{ valeur propre de } A\}$ et X un vecteur propre normé associé à λ . On a pour tout entier naturel k : $A^k X = \lambda^k X$, soit $\|A^k X\| = |\lambda|^k$. Comme $\|A^k X\| \leq \|A^k\| \cdot \|X\| = \|A^k\|$ (la norme matricielle considérée dérivant d'une norme vectorielle) on a : $|\lambda|^k \leq \|A^k\|$, soit $|\lambda| = \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$.

2/ Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \Delta = (d_{ij})$ soit diagonale. On a pour tout entier naturel k :

$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} = \|P\Delta^k P^{-1}\|^{1/k} \leq \|P\|^{1/k} \cdot \|P^{-1}\|^{1/k} \cdot \|\Delta^k\|^{1/k}$. Or $\|\Delta^k\| = \max_{1 \leq j \leq n} |d_{j,j}^k| = (\rho(\Delta))^k = (\rho(A))^k$, soit :

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \|P\|^{1/k} \cdot \|P^{-1}\|^{1/k} \rho(A).$$

Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P\|^{1/k} \cdot \|P^{-1}\|^{1/k} = 1$ on a donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$.

3/ Il existe une matrice diagonalisable D et une matrice N nilpotente telle que $A = D + N$ avec $ND = DN$, A et D ayant les mêmes valeurs propres (voir chap. III I.5). Pour tout $k \geq n$ on a $N^k = 0$ et :

$$A^k = (D + N)^k = \sum_{i=0}^n C_k^i D^{k-i} N^i = D^{k-n} \sum_{i=0}^n C_k^i D^{n-i} N^i.$$

Comme on a $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$ pour toute matrice M et N de $M_C(n)$ il vient :

$$\|A^k\| \leq \|D^{k-n}\| \left\| \left(\sum_{i=0}^n C_k^i \|D\|^{n-i} \|N\|^i \right) \right\| \leq \mu \|D^{k-n}\| \left\| \left(\sum_{i=0}^n C_k^i \right) \right\| \quad (\text{où } \mu = \max_{0 \leq i \leq n} \|D\|^{n-i} \|N\|^i).$$

Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ on a : $C_k^i = k(k-1)\dots(k-i+1) \leq k^i \leq k^n$, d'où :

$$\|A^k\| \leq \mu(n+1)k^n \|D^{k-n}\| \quad \text{soit} \quad \|A^k\|^{1/k} \leq [\mu(n+1)]^{1/k} \cdot k^{n/k} \cdot \|D^{k-n}\|^{1/k}$$

On a $\lim_{k \rightarrow \infty} [\mu(n+1)]^{1/k} \cdot k^{n/k} = 1$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^{k-n}\|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\|D^{k-n}\|^{1/(k-n)} \right]^{\frac{k-n}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|D^{k-n}\|^{1/(k-n)} = \rho(D) = \rho(A)$

(l'avant-dernière égalité résulte de 3/ et la dernière du fait que les valeurs propres de D et de A sont égales).

On en déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A)$, et ainsi $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$.

4/ Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque dans $M_C(n)$. L'espace vectoriel $M_C(n)$ est de dimension finie donc toutes les normes sont équivalentes (Chap. VI/ 4.1) et il existe donc deux constantes α et β strictement positives telles que :

$$\alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|.$$

Pour tout entier naturel non nul k on a donc $\alpha^{1/k} \cdot \|A^k\|^{1/k} \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \beta^{1/k} \cdot \|A^k\|^{1/k}$. Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{1/k} = \beta^{1/k} = 1$ et que

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$ d'après la question précédente on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\cdot\|^{1/k} = \rho(A)$.

IX. 1°/ Supposons que $\bigcap_{f \in I} Z(f) = \emptyset$. Si f est continue $Z(f)$ est un fermé de E comme image réciproque de $\{0\}$ par f .

Comme E est compact il existe $f_1, \dots, f_n$ éléments de I tels que $\bigcap_{i=1}^n Z(f_i) = \emptyset$ (exercice 4). La fonction $g = \sum_{i=1}^n f_i^2$

appartient alors à I et ne s'annule pas dans E , donc $1/g \in C(E; \mathbb{R})$ et $1 = (1/g) \cdot g \in I$ (car I est un idéal) et par conséquent $I = C(E; \mathbb{R})$ contrairement à l'hypothèse.

2°/ Soit J un idéal maximal de $C(E; \mathbb{R})$ et soit $x \in \bigcap_{f \in J} Z(f)$. Posons $I_x = \{f \in E / f(x) = 0\}$; il est clair que I_x est un idéal de $C(E; \mathbb{R})$ contenant J donc $J = I_x$ par maximalité de J .

XI. 1° Posons, pour $x \in E$: $N(\bar{x}) = \inf_{y \in \bar{x}} \|y\|$. On a : $\bar{x} = \{y \in E / y - x \in F\} = x + F = x - F$. D'où

$$N(\bar{x}) = \inf_{f \in F} \|x + f\| = d(x, F).$$

On a alors $N(\bar{x}) = 0$ ssi $d(x, F) = 0$ ssi $x \in F$ (voir exercice complémentaire III), i.e. $\bar{x} = \bar{0}$.

Pour tout x et y de E tout f et f' de F on a : $N(\bar{x} + \bar{y}) \leq \|x + y + f + f'\| \leq \|x + f\| + \|y + f'\|$.

En passant à l'inf sur f' il vient $N(\bar{x} + \bar{y}) \leq \|x + f\| + N(\bar{y})$, et en passant à l'inf sur f :

$$N(\bar{x} + \bar{y}) \leq N(\bar{x}) + N(\bar{y}).$$

Pour tout réels λ et tout x de E on a : $N(\lambda \cdot \bar{x}) = N(\lambda \cdot \bar{x}) = \inf_{f \in F} \|\lambda x + f\| = \inf_{f \in F} \|\lambda(x + f)\| = |\lambda| \cdot N(\bar{x})$.

Ainsi N est une norme dans E/F .

Montrons maintenant que E/F muni de cette norme est complet. Soit $(\bar{x}_n)$ une suite de Cauchy de E/F .

Pour montrer que $(\bar{x}_n)$ est convergente il suffit de montrer qu'elle a une valeur d'adhérence, i.e. qu'il

existe une suite extraite convergente. Quitte à prendre une suite extraite de $(\bar{x}_n)$ on peut supposer que

pour tout entier naturel n on a $N(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. D'après la caractérisation de la borne inférieure

(voir chapitre 1, introduction) pour tout entier naturel n il existe $y_n \in \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n$ tel que

$N(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) \leq \|y_n\| \leq N(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) + \frac{1}{2^{n+1}}$. D'où, pour tout entier naturel n : $\|y_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. La série $\sum \|y_n\|$ est donc convergente, et, E étant complet, la série $\sum y_n$ aussi. Mais pour tout x de E on a $N(\bar{x}) \leq \|x\|$ (car $x \in \bar{x}$) et par conséquent la projection canonique $x \mapsto \bar{x}$ de E dans E/F est continue. La série $\sum \bar{y}_n$ est donc convergente dans E/F : or $\bar{y}_n = \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n$ donc la série $\sum \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n$ est convergente, ce qui équivaut à la convergence de la suite $(\bar{x}_n)$ et achève la démonstration.

2° Si f est une forme linéaire continue de E alors $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue.

Réciproquement supposons que $\text{Ker } f$ soit un fermé de E . Soit π la projection canonique de E dans

$E/\text{Ker } f$, i l'injection canonique de $\text{Im } f$ dans $\mathbb{R}$. La décomposition canonique de f s'écrit $f = i \circ f \circ \pi$ où

f est l'application de $E/\text{Ker } f$ dans $\text{Im } f$ définie par $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$. On munit $E/\text{Ker } f$ de la norme

précédente (car $\text{Ker } f$ est fermé) et alors $\bar{f}$ est continue car elle est linéaire et $E/\text{Ker } f$ est de dimension

finie (car isomorphe à $\text{Im } f$ inclus dans $\mathbb{R}$). Comme i et π sont continues, alors $\bar{f}$ aussi.

