

EXERCICE 1

Nous avons appris à étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par une relation de récurrence de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ » dans les cas simples où la fonction f est monotone. Que se passe-t-il si on assouplit un peu ces hypothèses ?

- 1) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Si $\mu \in [0, 4]$, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est appelée une suite *logistique*.

- 2) a) Chercher des renseignements sur la fonction `pointplot` du package `plots`.
 b) Ecrire une procédure `logist` prenant pour argument μ , u_0 et n et renvoyant dans un même repère le tracé des points (k, u_k) correspondants pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 c) Pour $u_0 = 0,1$ et $n = 1000$, exécuter la procédure `logist` avec différentes valeurs de μ dans l'ordre croissant depuis 0 vers 4 et tenter une synthèse des résultats observés.
- 3) Ecrire une procédure `logistarach` prenant pour argument μ , u_0 et n et renvoyant dans un même repère le graphe de la fonction $x \mapsto \mu x(1-x)$, celui de la droite d'équation $y = x$ et la « toile d'araignée » des réels $u_0, u_1, \dots, u_n$ construite à partir de ces courbes.

EXERCICE 2

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$. Les suites $(S_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont appelées

des *séries de Riemann*. On rappelle trois résultats connus : $S_n(1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$,

$$S_n(-1) = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{2} \quad \text{et} \quad S_n(-2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^3}{3}.$$

- 1) Ecrire une procédure `riemann` prenant pour argument un réel α et renvoyant dans un même repère le tracé des points $(k, S_k(\alpha))$ pour tout $k \in \llbracket 1, 100\,000 \rrbracket$ multiple de 5 000 — on représente un point sur 5 000 afin de ne pas charger la figure.
- 2) Pour $\alpha = -2$, représenter dans un même repère la figure obtenue à la question 1) et le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Le résultat est-il convaincant ? Adapter pour $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.
- 3) Conjecturer un équivalent de $S_n(\alpha)$ lorsque n tend vers ∞ pour tout $\alpha < 1$.
- 4) Que semble-t-il se passer pour $\alpha > 1$?