Equations différentielles linéaires

Une *équation différentielle* est une équation, dont l'inconnue est une fonction y, dans laquelle cohabitent à la fois y et ses dérivées $y', y'' \ldots$ Par exemple, $y' = x^2 e^y + 1$ est une équation différentielle. L'ennui, c'est qu'en général les équations différentielles sont très difficiles à résoudre. Nous nous contenterons pour cette raison de travailler dans le cadre à peu près agréable des *équations différentielles linéaires*, i.e. de la forme :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

où n est appelé l'*ordre* de l'équation et b son *second membre*. Lorsque la fonction b est nulle, on dit que l'équation est *homogène* ou *sans second membre*.

Mais pourquoi ce mot : « linéaire » ? Vous l'avez déjà rencontré : linéarité de l'intégrale, linéarité du produit scalaire, du déterminant et du produit vectoriel par rapport à chacune de leurs variables, etc. Linéarité d'une application, dans tous les cas. Ici, posons pour toute fonction y n fois dérivable : $T(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$. L'application T ainsi définie se trouve alors être *linéaire*, car pour toutes fonctions y_1 et y_2 n fois dérivables sur I et pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= a_n(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n)} + \ldots + a_1(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + a_0(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1 \Big(a_n(x)y_1^{(n)} + \ldots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 \Big) + \lambda_2 \Big(a_n(x)y_2^{(n)} + \ldots + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 \Big) = \lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2). \end{aligned}$$

Ce que nous voulons, c'est résoudre l'équation différentielle linéaire $T(y) = b$ d'inconnue y où b est un second membre fixé. Supposons-en connue **une** solution particulière y_{part} ainsi que **toutes** les solutions de l'équation **homogène**. Alors pour toute fonction y n fois dérivable :

$$\begin{aligned} T(y) = b \quad &\Longleftrightarrow \quad T(y) = T(y_{\text{part}}) \quad \Longleftrightarrow \quad T(y) - T(y_{\text{part}}) = 0 \quad \overset{\text{Linéarité}}{\Longleftrightarrow} \quad T(y - y_{\text{part}}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y - y_{\text{part}} \text{ est solution de l'équation } \textbf{homogène} \\ &\Longleftrightarrow \quad y \text{ est la somme de la solution particulière } y_{\text{part}} \text{ et d'une solution de l'équation } \textbf{homogène}. \end{aligned}$$

Propriété fondamentale s'il en est ! L'essentiel du chapitre est là : pour résoudre une équation différentielle linéaire, il suffit de savoir en trouver une solution particulière et de savoir résoudre l'équation **homogène** associée.

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions manipulées seront toutes à valeurs dans $\mathbb{K}$. Mais pourquoi ce $\mathbb{K}$? Pourquoi ne nous contentons-nous pas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$? Parce qu'il ne revient pas au même de chercher les solutions réelles d'une équation différentielle et d'en chercher les solutions complexes. Les solutions réelles sont aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche celles qui sont réelles, il reste du travail. Autant distinguer les deux cas directement dans la théorie en travaillant avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1 Préliminaires

1.1 Continuité/dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Définition (Fonction continue/dérivable à valeurs complexes) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.

- Soit $a \in I$. On dit que f est *continue en a* (resp. *dérivable en a*) si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont. Dans le cas des fonctions dérivables, on appelle *nombre dérivé de f en a*, noté $f'(a)$, le nombre complexe : $f'(a) = \text{Re}(f)'(a) + i\,\text{Im}(f)'(a)$.
- On dit que f est *continue sur I* (resp. *dérivable sur I*) si f l'est en tout point de I. Dans le cas des fonctions dérivables, l'application $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$ est appelée la *dérivée de f sur I*.

L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues (resp. dérivables) sur I est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$).

Théorème (Dérivée des fonctions de la forme $x \longmapsto e^{\varphi(x)}$)

- Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. L'application $x \longmapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I de dérivée l'application $x \longmapsto \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$.
- En particulier, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto ae^{ax}$.

Démonstration Pour commencer : $e^{\varphi} = e^{\text{Re}(\varphi) + i\text{Im}(\varphi)} = e^{\text{Re}(\varphi)} e^{i\text{Im}(\varphi)} = e^{\text{Re}(\varphi)} \Big(\cos \text{Im}(\varphi) + i \sin \text{Im}(\varphi) \Big)$, donc : $\text{Re}(e^{\varphi}) = e^{\text{Re}(\varphi)} \cos \text{Im}(\varphi)$ et $\text{Im}(e^{\varphi}) = e^{\text{Re}(\varphi)} \sin \text{Im}(\varphi)$.

- Par hypothèse φ est dérivable sur I, i.e. $\mathrm{Re}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ le sont. Par composition avec les fonctions exp, sin et cos qui sont dérivables sur tout $\mathbb{R}$, $e^{\mathrm{Re}(\varphi)}$, $\cos \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\sin \mathrm{Im}(\varphi)$ sont dérivables sur I et :

$$\left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)' = \mathrm{Re}(\varphi)' e^{\mathrm{Re}(\varphi)}, \qquad \big(\cos \mathrm{Im}(\varphi)\big)' = -\mathrm{Im}(\varphi)' \sin \mathrm{Im}(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \big(\sin \mathrm{Im}(\varphi)\big)' = \mathrm{Im}(\varphi)' \cos \mathrm{Im}(\varphi).$$

- Du coup, par produit, $\mathrm{Re}(e^\varphi) = e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \cos \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(e^\varphi) = e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \sin \mathrm{Im}(\varphi)$ sont dérivables sur I et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^\varphi)' &= \left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \cos \mathrm{Im}(\varphi)\right)' = \left(e^{\mathrm{Re}(\varphi)}\right)' \times \cos \mathrm{Im}(\varphi) + e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \times \big(\cos \mathrm{Im}(\varphi)\big)' \\ &= \Big[\mathrm{Re}(\varphi)' \cos \mathrm{Im}(\varphi) - \mathrm{Im}(\varphi)' \sin \mathrm{Im}(\varphi)\Big] e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \end{aligned}$$

et de même : $\quad \mathrm{Im}(e^\varphi)' = \Big[\mathrm{Re}(\varphi)' \sin \mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi)' \cos \mathrm{Im}(\varphi)\Big] e^{\mathrm{Re}(\varphi)}.$

- Nous avons bien montré que e^φ est dérivable sur I puisque ses parties réelle et imaginaire le sont. Enfin :

$$\varphi' e^\varphi = \Big[\mathrm{Re}(\varphi)' + i\mathrm{Im}(\varphi)'\Big] \times e^{\mathrm{Re}(\varphi)} \Big[\cos \mathrm{Im}(\varphi) + i \sin \mathrm{Im}(\varphi)\Big] = \mathrm{Re}(e^\varphi)' + i\mathrm{Im}(e^\varphi)' = \big(e^\varphi\big)'. \qquad \blacksquare$$

Le théorème suivant est momentanément admis. C'est en partie sur lui que les résultats de ce chapitre reposent.

Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables constantes) Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

✌ ✌ ✌ **Explication** L'hypothèse que I est un **intervalle** est en un sens l'hypothèse essentielle de ce théorème. La fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$ et constante égale à 2 sur $[2, 3]$ a une dérivée nulle mais elle n'est pas constante sur $[0, 1] \cup [2, 3]$.

1.2 Primitives

Définition (Primitive) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit qu'une application $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est **une** *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I de dérivée f.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ est **une** primitive de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et Arctan est **une** primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème (« Unicité » des primitives) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On suppose que f possède une primitive F sur I. Les primitives de f sur I sont alors toutes les applications $F + \lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

✖✖✖ **Attention !** Comme le montre ce théorème, il n'existe jamais une seule primitive. Il peut ne pas en exister, mais s'il en existe, il en existe une infinité et elles sont toutes égales à une constante additive près.

Démonstration Soit $\tilde{F} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \tilde{F} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \quad &\Longleftrightarrow \quad \tilde{F}' = f \text{ sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{F}' = F' \text{ sur } I \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(\tilde{F} - F\big)' = 0 \text{ sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{F} - F \text{ est constante sur } I \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} / \quad \tilde{F} = F + \lambda \text{ sur } I. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Définition (Intégrale sur un segment d'une fonction à valeurs complexes) Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et $f \in \mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{C}\big)$. On appelle *intégrale de f sur $[a, b]$* le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\ \mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\ \mathrm{d}t$, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

✖✖✖ **Attention !** Une intégrale en ce sens ne peut être interprétée comme une aire, même éventuellement comptée algébriquement, puisqu'il s'agit d'un nombre complexe.

Exemple $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix}\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos x\ \mathrm{d}x + i \int_0^{2\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_{x=0}^{x=2\pi} + i\big[-\cos x\big]_{x=0}^{x=2\pi} = 0 + i.0 = 0.$

Le théorème suivant est momentanément admis. C'est en partie sur lui que les résultats de ce chapitre reposent.

Théorème (Existence de primitives pour les fonctions continues) Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $a \in I$.

(i) On pose, pour tout $x \in I$: $F(x) = \int_a^x f$. L'application $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ ainsi définie est une primitive de f sur I.

(ii) Pour tout $A \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend la valeur A en a : c'est la fonction $x \longmapsto A + \int_a^x f$.

✌✌✌ **Explication**

- L'assertion (i) est équivalente à la fameuse formule « $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ » où F est une primitive de f sur $[a,b]$, que nous démontrerons proprement en fin d'année.
- Point de mystère dans la formule « $A + \int_a^x f$ » de l'assertion (ii) : la fonction $x \longmapsto \int_a^x f$ est une primitive de f et s'annule en a, donc il suffit de lui ajouter A pour qu'elle vaille A en a !

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Equations homogènes (ou sans second membre)

Théorème (Equation différentielle $y' + a(x)y = 0$) Soient $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I et $y \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $y' + ay = 0$ sur I. (ii) $y = \lambda e^{-A}$ sur I pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si de plus une condition (dite *condition initiale*) de la forme $y(x_0) = y_0$ est imposée, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, alors la valeur de la constante λ est fixée. L'équation avec condition initiale possède ainsi une et une seule solution.

Démonstration

- Commençons par l'équivalence des assertions (i) et (ii).

  (i) $\Longrightarrow$ (ii) Posons $z = ye^A$ sur I.
  Alors z est dérivable sur I et : $z' = y'e^A + yA'e^A = (y' + ay)e^A = 0$. Ceci implique que z est constante sur I en vertu d'un théorème admis au début de ce chapitre. C'est justement le résultat espéré.

  (ii) $\Longrightarrow$ (i) Evident, il suffit de dériver $y = \lambda e^{-A}$ pour voir que $y' + ay = -A'y + ay = -ay + ay = 0$.
- Et que se passe-t-il si on impose la condition initiale $y(x_0) = y_0$ pour certains $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$? Nous venons de voir que les solutions de l'équation étudiée sont les fonctions $y = \lambda e^{-A}$, λ décrivant $\mathbb{K}$. Dire que $y(x_0) = y_0$ c'est dire que $\lambda e^{-A(x_0)} = y_0$, ou encore que $\lambda = y_0 e^{A(x_0)}$. La valeur de λ est ainsi déterminée. ■

Exemple Les solutions (réelles) de l'équation $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$, où $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{\mathrm{Arctan}\, x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

Corollaire (Caractérisation de la fonction $x \longmapsto e^{ax}$) Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $x \longmapsto e^{ax}$ est l'unique application $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que : $y' = ay$ et $y(0) = 1$.

Corollaire (Equation fonctionnelle des exponentielles) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad f(x+y) = f(x)f(y)$.

Alors f est soit identiquement nulle, soit de la forme $x \longmapsto e^{ax}$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$.

✌✌✌ **Explication** Ce corollaire affirme qu'outre la fonction nulle, les exponentielles sont les seules applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dérivables, qui tranforment les sommes en produits.

Démonstration Comme $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$, $f(0)$ vaut soit 0 soit 1. Dans le cas où $f(0) = 0$, $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est nulle. Nous pouvons désormais supposer que $f(0) = 1$.

Fixons pour un temps $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \longmapsto f(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $y \longmapsto f'(x+y)$, et de même la fonction $y \longmapsto f(x)f(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $y \longmapsto f(x)f'(y)$. Comme par hypothèse ces deux fonctions sont égales, on a donc : $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f(x)f'(y)$.

En particulier pour $y = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)f(x)$. Comme $f(0) = 1$, le corollaire précédent montre comme voulu que f est la fonction $x \longmapsto e^{ax}$ pour $a = f'(0)$. ■

2.2 Equations avec second membre

Théorème (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$) Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une et une seule solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration Notons A une primitive de a sur I.

- **Idée de la preuve :** Comme nous l'avons vu, les solutions de l'équation **homogène** sont de la forme λe^{-A} où λ est une **constante**. Nous allons résoudre l'équation complète, i.e. avec second membre, en faisant « varier la constante ». Cette méthode essentielle s'appelle la méthode de *variation de la constante.*
- Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Notons λ la **fonction** ye^A, dérivable sur I. Alors $y = \lambda e^{-A}$ comme dans le cas des équations homogènes, mais ici λ n'est pas une constante.

$$
\begin{aligned}
y' + ay = b \quad \text{et} \quad y(x_0) = y_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\lambda e^{-A}\right)' + a\left(\lambda e^{-A}\right) = b \quad \text{et} \quad \lambda(x_0)e^{-A(x_0)} = y_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\lambda' e^{-A} - \lambda A' e^{-A}\right) + a\lambda e^{-A} = b \quad \text{et} \quad \lambda(x_0) = y_0 e^{A(x_0)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda' e^{-A} - a\lambda e^{-A} + a\lambda e^{-A} = b \quad \text{et} \quad \lambda(x_0) = y_0 e^{A(x_0)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda' = be^A \quad \text{et} \quad \lambda(x_0) = y_0 e^{A(x_0)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ est une primitive de } be^A \text{ telle que } \lambda(x_0) = y_0 e^{A(x_0)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda(x) = y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\, \mathrm{d}t \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Ces équivalences prouvent l'existence et l'unicité d'une solution au problème posé avec condition initiale. ■

Le principe du théorème suivant a déjà été expliqué en introduction de ce chapitre.

Théorème (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière) Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, A une primitive de a sur I et y_{part} une solution fixée de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I dite *solution particulière.* Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

$$y' + ay = b \text{ sur } I \qquad \text{si et seulement si} \qquad y = y_{\text{part}} + \lambda e^{-A} \text{ sur } I \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Solution générale de l'équation avec second membre = solution particulière + solution générale de l'équation **homogène**

En d'autres termes, si on connaît **une** solution particulière de l'équation complète, on en connaît **toutes** les solutions : toute solution est en effet la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation **homogène**.

✎✎✎ **En pratique** Décrivons à présent **la** méthode générale pour résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre — une méthode plus efficace est présentée plus loin pour certaines formes d'équations. Avec les notations précédentes :

1) On cherche les solutions de l'équation **homogène** $y' + a(x)y = 0$.

2) On cherche **une** solution particulière de l'équation complète. Comment ? Variation de la constante.

3) Les solutions de l'équation complète sont alors la somme d'une solution de l'équation homogène résolue en 1) et de la solution particulière trouvée en 2).

4) Si une condition initiale est imposée, on en tient compte en choisissant convenablement la constante dans la solution de l'équation homogène.

Exemple L'unique solution de l'équation $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{3x}$.

En effet

- **Réécriture de l'équation :** Réécrivons tout d'abord cette équation sous la forme $y' + \dfrac{y}{x} = x$ pour nous ramener à la forme d'équations des théorèmes précédents. Parce qu'il y a un problème de définition en 0, nous la résoudrons cette équation que sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Attention : Nous ne pouvons pas la résoudre sur $\mathbb{R}^*$ tout entier car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un **intervalle**. Or nos théorèmes ne sont vrais que sur des intervalles. Nous lèverons cette difficulté plus loin grâce à la méthode du *recollement*.

- **Résolution de l'équation homogène :** Puisque la fonction logarithme est une primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda e^{-\ln x} = \dfrac{\lambda}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation complète :** Cherchons une solution particulière de l'équation $y' + \dfrac{y}{x} = x$ sous la forme $y : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ où $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ — variation de la constante.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = x^2.$$

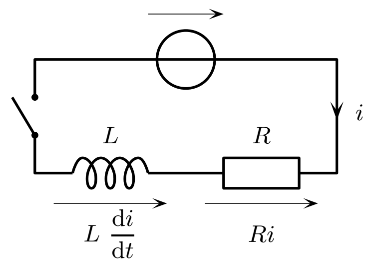
Attention de ne pas donner λ comme solution particulière à la place de y !

  Nous pouvons **choisir** pour λ la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$ primitive de $x \longmapsto x^2$, de sorte que $y : x \longmapsto \dfrac{x^2}{3}$ est une solution particulière de notre équation.

- **Conclusion :** Les solutions (réelles) de l'équation $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{\lambda}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui s'annule en 1 est $x \longmapsto \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{1}{3x} = \dfrac{x^3-1}{3x}$, obtenue pour $\lambda = -\dfrac{1}{3}$.

✎✎✎ **En pratique** Sur une copie, vous n'êtes pas obligés de rédiger la méthode de la variation de la constante. Vous pouvez vous contenter de la mettre en œuvre au brouillon et écrire seulement sur votre copie : « Vérifions que la fonction machin (celle que vous avez trouvée au brouillon) est une solution de l'équation ». Une telle rédaction est tout à fait correcte et rapide. A l'oral cependant, la distinction brouillon/copie ne vaut plus. Dans ce cas vous devez savoir rédiger convenablement la méthode de variation de la constante.

Exemple Un peu de physique... On s'intéresse au circuit RL série ci-contre, dans lequel E est un échelon de tension, i.e. une tension constante. On réalise l'expérience suivante : avant l'instant $t = 0$, le circuit est ouvert et donc l'intensité i est nulle ; on ferme le circuit à $t = 0$. Question : comment l'intensité i évolue-t-elle ?



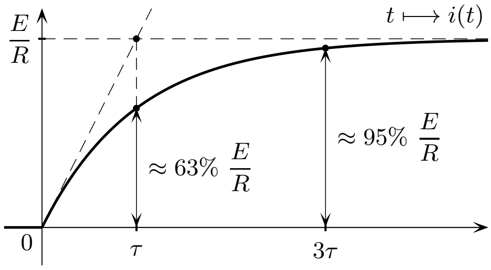
La loi d'Ohm affirme que la tension aux bornes du conducteur ohmique de résistance R est Ri et que la tension aux bornes de la bobine d'inductance L est $L\,\dfrac{di}{dt}$. Du coup, la loi des mailles nous fournit l'équation différentielle suivante : $\quad L\,\dfrac{di}{dt} + Ri = E$.

Posons $\tau = \dfrac{L}{R}$ — la *constante de temps* du circuit, homogène à une durée. Notre équation différentielle peut aussi s'écrire : $\quad i' + \dfrac{i}{\tau} = \dfrac{E}{L}\quad$ et nous allons la résoudre sous la forme $y' + \dfrac{y}{\tau} = \dfrac{E}{L}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{y}{\tau} = 0$ sont toutes les fonctions $t \longmapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation complète :** Dans ce cas simple, on peut éviter de faire « varier la constante » moyennant un petit effort d'intuition. Notre second membre est une constante $\dfrac{E}{L}$. Comme la dérivée d'une fonction constante est nulle, la fonction constante $t \longmapsto \dfrac{\tau E}{L} = \dfrac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation $y' + \dfrac{y}{\tau} = \dfrac{E}{L}$.

- **Conclusion :** Notre intensité i est finalement de la forme : $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad i(t) = \dfrac{E}{R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$. Il reste à déterminer λ à partir des conditions initiales. Or nous savons que $i(0) = 0$ car l'intensité dans une bobine varie continûment. Du coup $\lambda = -\dfrac{E}{R}$ par un calcul immédiat. Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$



- **Analyse du résultat :**
  On voit sur son graphe que i atteint « assez vite » sa limite $\frac{E}{R}$ en ∞. On peut ainsi décomposer par la pensée l'évolution de i comme la juxtaposition de deux régimes : un régime dit *transitoire* et un autre dit *permanent*. Le régime permanent décrit l'évolution idéale de i au voisinage de $t = \infty$: dans notre exemple, c'est la constante $\frac{E}{R}$. Le régime transitoire, au contraire, décrit l'évolution de i depuis $t = 0$ jusqu'au régime permanent ; il décrit donc un état passager du circuit étudié.

  Classiquement, on considère que le régime permanent est atteint à partir de $t = 3\tau$. Pourquoi cette valeur ? On aurait pu en choisir une autre, mais celle-ci est simple à utiliser : $i(3\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-3}\right) \approx 0,95\ \frac{E}{R} \approx 95\%\ \frac{E}{R}$.

  Notez enfin qu'on peut déterminer aisément la valeur de τ sur le graphe de i. La tangente de i en 0 est la droite d'équation $y = i'(0)(t-0) + i(0) = \frac{E}{R\tau}t$. Elle coupe la droite d'équation $y = \frac{E}{R}$ (régime permanent) en le point de coordonnées $\left(\tau, \frac{E}{R}\right)$. Par conséquent τ est l'abscisse de ce point. En outre : $i(\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0,63\ \frac{E}{R} \approx 63\%\ \frac{E}{R}$.

Le théorème suivant, de démonstration triviale, est une autre conséquence importante de la linéarité des équations différentielles étudiées dans ce chapitre.

Théorème (Principe de superposition) Soient $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est une solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x)$ et si y_2 est une solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation $y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

✎✎✎ **En pratique** Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$, on n'a qu'à additionner une solution particulière de chacune des équations $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$. Au lieu de faire un seul calcul complexe, on peut choisir d'en faire deux simples.

2.3 Cas particuliers de seconds membres

✖✖✖ **Attention !** Ce paragraphe ne concerne que les équations linéaires du premier ordre **À COEFFICIENTS CONSTANTS** !

✎✎✎ **En pratique** Pour certains seconds membres, on peut éviter d'utiliser la méthode de variation de la constante à condition de connaître la technique décrite ci-après, qui couvre un très grand nombre de cas courants.
Soient $a, k \in \mathbb{K}$ et P une fonction polynomiale de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- **Equations de la forme $y' + ay = P(x)e^{kx}$:**
  Pour ce type d'équation, une solution particulière peut être cherchée sous la forme $x \longmapsto Q(x)e^{kx}$ où Q est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré :

  1) inférieur ou égal à n si $k \neq -a$; 2) inférieur ou égal à $(n+1)$ si $k = -a$.

- **Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, équations de la forme $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ ou $y' + ay = P(x)\sin(kx)$:**
  Pour trouver une solution particulière de ce type d'équation, on commence par chercher une solution particulière **complexe** $y_{\mathbb{C}}$ de l'équation **complexe** $y' + ay = P(x)e^{ikx}$. On applique pour cela la méthode décrite à l'instant en introduisant une fonction polynomiale à coefficients **complexes**. On remarque ensuite que $\mathrm{Re}(y_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ et que $\mathrm{Im}(y_{\mathbb{C}})$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\sin(kx)$.

- **Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, équations de la forme $y' + ay = P(x)\mathrm{ch}(kx)$ ou $y' + ay = P(x)\mathrm{sh}(kx)$:**
  Pour trouver une solution particulière de ce type d'équation, on commence par chercher une solution particulière y^+ de l'équation $y' + ay = P(x)e^{kx}$ et une solution particulière y^- de l'équation $y' + ay = P(x)e^{-kx}$. Alors d'après le principe de superposition, $\frac{y^+ + y^-}{2}$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\mathrm{ch}(kx)$ et $\frac{y^+ - y^-}{2}$ est une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(x)\mathrm{sh}(kx)$.

Exemple La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + 2y = 2xe^x + e^{-2x}$ qui s'annule en 0 est la fonction $x \longmapsto \frac{6x-2}{9}\ e^x + \frac{9x+2}{9}\ e^{-2x}$.

En effet

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-2x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y' + 2y = xe^x$ **:** Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2y = xe^x$ sous la forme $x \longmapsto (ax+b)e^x$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \longmapsto (ax+b)e^x \text{ est solution de } y' + 2y = xe^x \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(ax + (a+b)\Big)e^x + 2(ax+b)e^x = xe^x \\ &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3a-1)x + (a+3b) = 0 \\ &\iff \quad 3a - 1 = a + 3b = 0 \qquad \text{après identification} \\ &\iff \quad a = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{9}. \qquad \text{La fonction } x \longmapsto \frac{3x-1}{9}\, e^x \text{convient.} \end{aligned}$$

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y' + 2y = e^{-2x}$ **:** Cherchons une solution particulière de l'équation $y' + 2y = e^{-2x}$ sous la forme $x \longmapsto (ax+b)e^{-2x}$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & x \longmapsto (ax+b)e^{-2x} \text{ est solution de } y' + 2y = e^{-2x} \\ &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(ae^{-2x} - 2(ax+b)e^{-2x}\Big) + 2(ax+b)e^{-2x} = e^{-2x} \\ &\iff \quad a = 1. \qquad \text{La fonction } x \longmapsto xe^{-2x} \text{ convient.} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** D'après le principe de superposition, les solutions de l'équation $y' + 2y = 2xe^x + e^{-2x}$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \frac{2}{9}\,(3x-1)e^x + (x+\lambda)e^{-2x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui s'annule en 0 est obtenue pour $\lambda = \frac{2}{9}$.

Exemple L'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - y = \sin x$ qui vaut 1 en 0 est la fonction $x \longmapsto \frac{3e^x - \sin x - \cos x}{2}$.

En effet

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^x$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y' - y = e^{ix}$ **:** Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - y = e^{ix}$ sous la forme $x \longmapsto ae^{ix}$ pour un certain $a \in \underline{\underline{\mathbb{C}}}$.

$$\begin{aligned} x \longmapsto ae^{ix} \text{ est solution de } y' - y = e^{ix} \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad iae^{ix} - ae^{ix} = e^{ix} \quad \iff \quad a(i-1) = 1 \\ &\iff \quad a = \frac{1}{i-1} = -\frac{i+1}{2}. \qquad \text{La fonction } x \longmapsto -\frac{i+1}{2}\, e^{ix} \text{ convient.} \end{aligned}$$

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y' - y = \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$ **:** D'après le point précédent, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Im}\left(-\frac{i+1}{2}\, e^{ix}\right) = -\frac{\sin x + \cos x}{2}$ convient.
- **Conclusion :** Les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions $x \longmapsto -\frac{\sin x + \cos x}{2} + \lambda e^x$, λ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution qui vaut 1 en est obtenue $\lambda = \frac{3}{2}$.

2.4 La méthode du recollement

✎✎✎ **En pratique** La théorie qui précède ne dit rien de l'équation différentielle $x^2y' + y = e^x$ d'inconnue y définie et dérivable sur $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$. Pourquoi ? Parce que nous avons seulement réussi à résoudre les équations de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ sur un **<u>intervalle</u>**. On peut bien sûr mettre l'équation $x^2y' + y = e^x$ sous la forme $y' + \frac{y}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}$, mais on voit tout de suite que le terme $a(x)$ n'est alors pas défini en 0. L'équation de départ était définie sur $\mathbb{R}$; l'équation réécrite ne l'est plus que sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. La méthode du *recollement*, dans cet exemple, consiste à procéder comme suit :

1) On commence par résoudre l'équation $y' + \frac{y}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$). Chacune de ces deux résolutions nous fournit une constante. A priori ces deux constantes sont indépendantes l'une de l'autre.

2) On se demande dans un second temps à quelle condition sur les constantes obtenues en 1) on obtient une solution vraiment **dérivable** au point de recollement, ici 0. On n'obtient parfois aucune solution, parfois on en obtient un nombre fini et parfois on en obtient un nombre infini décrit par un ou plusieurs paramètres. Tout est possible.

Exemple On souhaite résoudre l'équation $xy' + (x+1)y = x+1$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résolution sur $\mathbb{R}$, donc. Cette équation possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}$: la fonction constante égale à 1.

En effet

- **Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) :** La fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ admet la fonction $x \longmapsto x + \ln|x|$ comme primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$), donc les solutions de l'équation homogène sur cet intervalle sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-(x+\ln|x|)} = \dfrac{\lambda e^{-x}}{|x|}$, λ décrivant $\mathbb{R}$. Quitte à remplacer λ par $-\lambda$ sur $\mathbb{R}_-^*$, qui décrit $\mathbb{R}$ autant que λ, on peut donner les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) sous la forme $x \longmapsto \dfrac{\lambda e^{-x}}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Résolution de l'équation complète sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) :** On pourrait s'adonner à la méthode de variation de la constante, mais dans cet exemple on peut remarquer tout de suite que la fonction constante $x \longmapsto 1$ est solution particulière. Les solutions de l'équation complète sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) sont donc toutes les fonctions $x \longmapsto 1 + \dfrac{\lambda e^{-x}}{x}$, λ décrivant $\mathbb{R}$.
- **Résolution de l'équation complète sur $\mathbb{R}$ tout entier :** Deux étapes ici. Nous allons raisonner par analyse-synthèse pour montrer que $x \longmapsto 1$ est la seule solution de notre équation sur $\mathbb{R}$ tout entier.

  1) **Analyse :** Soit $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Faisons l'hypothèse que y est solution de l'équation étudiée sur $\mathbb{R}$. Evaluant en 0 nous obtenons alors $y(0) = 1$. Par ailleurs y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

  Il existe donc <u>**DEUX**</u> constantes $\lambda^+, \lambda^- \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\lambda^+ e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + \dfrac{\lambda^- e^{-x}}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

  Nous avons supposé y dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue en 0. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{|x|} = \infty$, on ne peut avoir $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = y(0)$ que si $\lambda^+ = \lambda^- = 0$. Du coup y est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

  2) **Synthèse :** Réciproquement, il est évident que la fonction $x \longmapsto 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et y vérifie l'équation différentielle étudiée.

3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Equations homogènes (ou sans second membre)

Théorème (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons Δ son discriminant.

- **Cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :**

  1) Si $\Delta \neq 0$, soient r et r' les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$, λ et λ' décrivant $\mathbb{C}$.

  2) Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$, λ et μ décrivant $\mathbb{C}$.

- **Cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :**

  1) Si $\Delta > 0$, soient r et r' les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$, λ et λ' décrivant $\mathbb{R}$.

  2) Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

  3) Si $\Delta < 0$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $x \longmapsto e^{rx}\Big(\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)\Big)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, qu'on peut aussi mettre sous la forme $x \longmapsto \lambda e^{rx} \sin(\omega x + \varphi)$ ou $x \longmapsto \lambda e^{rx} \cos(\omega x + \varphi)$, λ et φ décrivant $\mathbb{R}$.

Si de plus une condition (dite *condition initiale*) de la forme $y(x_0) = y_0$ <u>**et**</u> $y'(x_0) = y'_0$ est imposée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée. L'équation avec condition initiale possède ainsi une et une seule solution.

Démonstration Dans un premier temps, nous allons travailler avec des nombres complexes. Nous nous arrêterons sur le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en fin de promenade.

- Toute cette preuve repose sur l'idée suivante. Pour tout $r \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &\text{La fonction } x \longmapsto e^{rx} \text{ est solution de l'équation } ay'' + by' + cy = 0 \\ &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \quad \iff \quad ar^2 + br + c = 0 \\ &\iff \quad r \text{ est une racine du polynôme caractéristique } aX^2 + bX + c. \end{aligned}$$

- Fixons momentanément une racine r du polynôme $aX^2 + bX + c$ et cherchons les solutions de notre équation sous la forme $y : x \longmapsto z(x)e^{rx}$ — variation de la constante ! Anticipant la fin du calcul qui suit, nous remarquons tout de suite que la seconde racine du polynôme $aX^2 + bX + c$ est égale à $-r - \frac{b}{a}$, car la somme des racines du polynôme $aX^2 + bX + c$ vaut $-\frac{b}{a}$. Notons-la r'.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a\Big(z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x)\Big)e^{rx} + b\Big(z'(x) + rz(x)\Big)e^{rx} + cz(x)e^{rx} = 0 \\ &\iff \quad az'' + (2ar + b)z' + \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} z = 0 \\ &\iff \quad (z')' + \left(2r + \frac{b}{a}\right) z' = 0 \qquad \text{(tiens, c'est une équation linéaire du premier ordre)} \\ &\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x}. \end{aligned}$$

La fin du calcul requiert qu'on distingue les cas $\Delta \neq 0$ et $\Delta = 0$.

- Supposons $\Delta \neq 0$. Alors $r \neq -\frac{b}{2a}$, et donc $2r + \frac{b}{a} \neq 0$.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 \quad &\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} \\ &\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \frac{\lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x}}{-\left(2r + \dfrac{b}{a}\right)} + \mu \qquad \text{après primitivation} \\ &\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} + \mu \qquad (\text{on change le } \lambda) \\ &\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = z(x)e^{rx} = \lambda e^{-\left(r + \frac{b}{a}\right)x} + \mu e^{rx} \\ &\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{r'x} + \mu e^{rx} \qquad \text{comme voulu.} \end{aligned}$$

- Supposons $\Delta = 0$. Alors $r = -\frac{b}{2a}$ est l'unique racine du polynôme $aX^2 + bX + c$. En outre, $2r + \frac{b}{a} = 0$.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 \quad &\iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} \quad \iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = \lambda \\ &\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z(x) = \lambda x + \mu \qquad \text{après primitivation} \\ &\iff \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}/ \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = z(x)e^{rx} = (\lambda x + \mu)e^{rx} \qquad \text{comme voulu.} \end{aligned}$$

- Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se trouve ainsi complètement traité. Et si maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? Cette fois, a, b et c sont **réels** et nous cherchons les solutions **réelles** de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. Cela revient, parmi les solutions complexes trouvées ci-dessus, à déterminer lesquelles sont réelles et lesquelles ne le sont pas. Contentons-nous de faire ce travail dans le cas le plus intéressant : le cas $\Delta < 0$. Les racines de $aX^2 + bX + c$ sont alors complexes conjuguées de la forme $r \pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$.

  Soit y une solution complexe de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. En vertu des points précédents, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad y(x) = \alpha e^{rx + i\omega x} + \beta e^{rx - i\omega x} = \Big(\alpha e^{i\omega x} + \beta e^{-i\omega x}\Big)e^{rx}$.

  A quelle condition y est-elle réelle ? Si elle l'est, $\mathrm{Im}\big[y(0)\big] = 0$ et $\mathrm{Im}\left[y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = 0$. Or :

  1) $\mathrm{Im}\big[y(0)\big] = \mathrm{Im}(\alpha + \beta)$, donc $\mathrm{Im}(\beta) = -\mathrm{Im}(\alpha)$;
  2) $\mathrm{Im}\left[y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = \mathrm{Im}\Big[i(\alpha - \beta)e^{\frac{\pi r}{2\omega}}\Big] = \mathrm{Im}\Big[i(\alpha - \beta)\Big]e^{\frac{\pi r}{2\omega}} = \mathrm{Re}(\alpha - \beta)e^{\frac{\pi r}{2\omega}}$, donc $\mathrm{Re}(\beta) = \mathrm{Re}(\alpha)$.

  Conclusion : $\beta = \bar{\alpha}$. Du coup, si nous posons $\lambda = 2\mathrm{Im}(\alpha)$ et $\mu = 2\mathrm{Re}(\alpha)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \Big(\alpha e^{i\omega x} + \bar{\alpha} e^{-i\omega x}\Big)e^{rx} = 2\mathrm{Re}\Big(\alpha e^{i\omega x}\Big)e^{rx} = \Big(2\mathrm{Re}(\alpha)\cos(\omega x) + 2\mathrm{Im}(\alpha)\sin(\omega x)\Big)e^{rx} \\ &= \Big(\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)\Big)e^{rx}. \end{aligned}$$

  Réciproquement, cette fonction est bien solution de l'équation.

  Les formes « $\lambda e^{rx}\sin(\omega x + \varphi)$ » et « $\lambda e^{rx}\sin(\omega x + \varphi)$ » s'obtiennent aisément à partir de là grâce à une technique que nous avons étudiée dans notre chapitre « Fonctions circulaires ». ■

Exemple L'unique solution y de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est la fonction $x \longmapsto 2e^x - e^{2x}$.

En effet Les solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 - 3X + 2$ possède deux racines réelles distinctes, à savoir 1 et 2. Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ s'écrivent alors ainsi, après calcul de la dérivée : $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda + 2\mu = 0$, soit $\lambda = 2$ et $\mu = -1$.

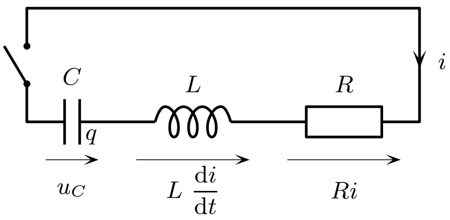
Exemple L'unique solution y de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est la fonction $x \longmapsto xe^x$.

En effet Les solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^x$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 - 2X + 1$ possède une unique racine double, égale à 1. Les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ s'écrivent alors ainsi, après calcul de la dérivée : $\mu = 0$ et $\lambda + \mu = 1$, soit $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.

Exemple L'unique solution y de l'équation $y'' + 4y = 0$ qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$ est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{\sin(2x)}{2}$.

En effet Les solutions (réelles) de l'équation $y'' + 4y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 + 4$ possède deux racines complexes conjuguées, à savoir $\pm 2i$. Les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$ s'écrivent alors ainsi, après calcul de la dérivée : $\mu = 0$ et $2\lambda = -1$, soit $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\mu = 0$.

Exemple Un peu de physique... On s'intéresse au circuit RLC série ci-contre en régime transitoire. Il s'égit d'étudier la décharge d'un condensateur dans une bobine et une résistance.



Nous disposons des relations suivantes : $q = Cu_C$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et la loi des mailles nous donne l'identité : $L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0$. En découle aussitôt l'équation différentielle :

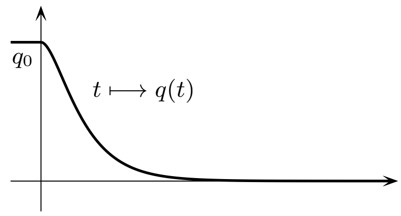
$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, q = 0,$$

où l'on a noté ω_0 la *pulsation propre* $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ du circuit et Q son *facteur de qualité* $\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Nous réalisons l'expérience suivante : avant l'instant $t = 0$, le circuit est ouvert (et donc l'intensité i est nulle) et le condensateur est chargé d'une charge q_0 ; on ferme le circuit à $t = 0$. Question : comment la charge q du condensateur évolue-t-elle ?

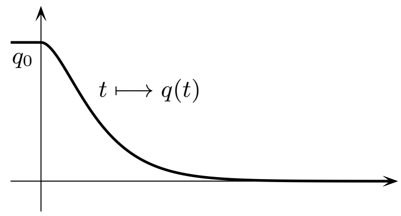
Le polynôme caractéristique de notre équation est $X^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}\,X + \omega_0^2$. Son discriminant Δ vaut $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)$.

La position de Q par rapport à $\dfrac{1}{2}$ détermine donc la nature du comportement de q.



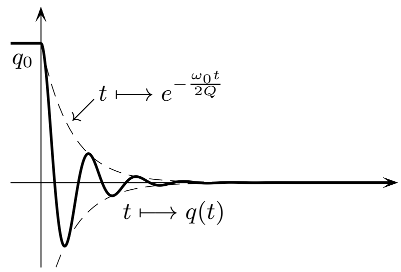
- **Régime apériodique :** $Q < \dfrac{1}{2}$, i.e. $\Delta > 0$.

  Les racines du polynôme caractéristique sont $-\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2}$, strictement négatives, disons ω^+ et ω^-. La charge q est donc de la forme $t \longmapsto \lambda e^{\omega_1 t} + \mu e^{\omega_2 t}$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notez que $q(0) = q_0$ et que $q'(0) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0) = i(0) = 0$ car la charge d'un condensateur et l'intensité parcourant une bobine sont des fonctions continues du temps.



- **Régime critique :** $Q = \dfrac{1}{2}$, i.e. $\Delta = 0$.

  Le polynôme caractéristique ne possède ici qu'une unique racine double $-\dfrac{\omega_0}{2Q}$. La charge q est donc de la forme $t \longmapsto (\lambda t + \mu)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



- **Régime pseudo-périodique :** $Q > \dfrac{1}{2}$, i.e. $\Delta < 0$.

  Les racines du polynôme caractéristique sont ici $-\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm i\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$. La charge q est donc de la forme $t \longmapsto \left[\lambda \sin\left(\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\right) + \mu \cos\left(\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\right)\right] e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Elle décroît vers 0 en oscillant à l'intérieur d'un tube exponentiel.

Il ressort de ces courbes que la charge q du condensateur tend vers 0 dans tous les cas, et même assez vite — décroissance exponentielle. Physiquement, cela veut dire que le condensateur se décharge. Dans cette situation de montage, le régime permanent n'est d'aucun intérêt : il ne s'y passe rien.

3.2 Equations avec second membre

Nous admettrons le théorème suivant pour ne pas perdre trop de temps.

Théorème (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Il existe une et une seule solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$.

Théorème (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, solutions générale et particulière) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et y_{part} une solution fixée de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I dite *solution particulière*. Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I.

$ay'' + by' + cy = d$ sur I si et seulement si $y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}}$ sur I pour une certaine solution y_{hom} de l'équation **homogène**.

Solution générale de l'équation avec second membre = solution particulière + solution générale de l'équation **homogène**

En d'autres termes, si on connaît <u>**une**</u> solution particulière de l'équation complète, on en connaît <u>**toutes**</u> les solutions : toute solution est en effet la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation **homogène**.

Théorème (Principe de superposition) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $d_1, d_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.
Si y_1 est une solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et si y_2 est une solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(x)$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = \lambda_1 d_1(x) + \lambda_2 d_2(x)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

3.3 Cas particuliers de seconds membres

✎✎✎ **En pratique**

- Comme dans le cas des équations du premier ordre, on dispose d'une méthode classique de recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = P(x)e^{kx}$, où $a, b, c, k \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et où P est une fonction polynomiale de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Elle consiste à chercher une solution de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{kx}$, où Q est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré :

  1) inférieur ou égal à n si k n'est pas racine du polynôme $aX^2 + bX + c$;

  2) inférieur ou égal à $(n+1)$ si k est racine **simple** du polynôme $aX^2 + bX + c$ (i.e. si k est racine et si le discriminant est non nul) ;

  3) inférieur ou égal à $(n+2)$ si k est racine **double** du polynôme $aX^2 + bX + c$ (i.e. si k est racine et si le discriminant est nul).
- Cette méthode s'adapte très bien, comme avec les équations du premier ordre, au cas des fonction sinus, cosinus, sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.

Exemple Les solutions de l'équation $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$ sont les fonctions $x \longmapsto -x^2 - 3 + \left(\lambda - \dfrac{x}{2}\right) e^x + \mu e^{-x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

En effet

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines du polynôme $X^2 - 1$ sont ± 1.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$:** Cherchons une solution particulière de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$ sous la forme $y : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)$ pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = x^2 + 1 \quad & \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1 \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a+1)x^2 + bx + (c - 2a + 1) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad a + 1 = b = c - 2a + 1 = 0 \qquad \text{après identification} \\
& \Longleftrightarrow \quad a = -1, \quad b = 0 \quad \text{et} \quad c = -3. \qquad \text{La fonction } x \longmapsto -x^2 - 3 \text{ convient.}
\end{aligned}$$

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y''-y=e^x$ **:** Cherchons une solution de l'équation $y''-y=e^x$ sous la forme $y : x \longmapsto (ax+b)e^x$ pour certains $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y''(x)-y(x)=e^x \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad \Big(ax+(2a+b)\Big)e^x-(ax+b)e^x=e^x$$
$$\iff 2a=1 \iff a=\frac{1}{2}.\qquad \text{La fonction } x\longmapsto \frac{xe^x}{2} \text{ convient.}$$

- **Conclusion :** D'après le principe de superposition, les solutions de l'équation complète $y''-y=x^2+1-e^x$ sont toutes les fonctions de la forme $x\longmapsto -x^2-3+\left(\lambda-\dfrac{x}{2}\right)e^x+\mu e^{-x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

Exemple Les solutions de l'équation $y''+y'+y=e^x\cos x$ sont toutes les fonctions :

$$x\longmapsto \left(\frac{2\cos x+3\sin x}{13}\right)e^x+\left[\lambda\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\mu\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right]e^{-\frac{x}{2}},\qquad \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

En effet

- **Résolution de l'équation homogène :** Les solutions de l'équation $y''+y'+y=0$ sont toutes les fonctions $x\longmapsto \left[\lambda\sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\mu\cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right]e^{-\frac{x}{2}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines du polynôme X^2+X+1 sont $e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y''+y'+y=e^{(1+i)x}$ **:** Cherchons une solution particulière de $y''+y'+y=e^{(1+i)x}$ sous la forme $y : x\longmapsto ae^{(1+i)x}$ pour un certain $a\in\mathbb{C}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y''(x)+y'(x)+y(x)=e^{(1+i)x} \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad (1+i)^2ae^{(1+i)x}+(1+i)ae^{(1+i)x}+ae^{(1+i)x}=e^{(1+i)x}$$
$$\iff (2+3i)a=1 \iff a=\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{13}.$$

La fonction $x\longmapsto \dfrac{2-3i}{13}\,e^{(1+i)x}$ convient.

- **Recherche d'une solution particulière de l'équation** $y''+y'+y=e^x\cos x=\mathrm{Re}\Big(e^{(1+i)x}\Big)$ **:** D'après le point précédent, la fonction $x\longmapsto \mathrm{Re}\left(\dfrac{2-3i}{13}\,e^{(1+i)x}\right)=\left(\dfrac{2\cos x+3\sin x}{13}\right)e^x$ convient.
- **Conclusion :** On obtient bien le résultat annoncé.