

NOMBRES COMPLEXES

1 LE CORPS $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES

1.1 CONSTRUCTION À PARTIR DU CORPS $\mathbb{R}$ DES NOMBRES RÉELS

Définition (Loi de composition interne) Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne sur E* , ou plus simplement *loi (interne) sur E* toute application de $E \times E$ dans E .

☞ ☞ ☞ **Explication** Une loi interne est ce que vous avez appelé une « opération » dans les classes antérieures : l'addition des réels, la multiplication des réels, l'addition des vecteurs... Par exemple, l'addition des vecteurs est une loi interne car c'est une façon d'associer, à tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs, un objet $\vec{u} + \vec{v}$ qui est encore un vecteur.

Nous supposons dans ce chapitre que nous connaissons parfaitement l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de ses deux lois $+$ et $\times$ d'addition et de multiplication. Partant de là, nous allons **construire** le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, c'est-à-dire justifier que cet ensemble $\mathbb{C}$ existe sans contradiction avec toutes les propriétés « que nous lui connaissons ». Il ne suffit pas de décréter qu'un monde existe avec telle et telle propriétés pour qu'il existe réellement : encore faut-il qu'il ne soit pas contradictoire.

- Nous partons de l'ensemble $\mathbb{R}^2$, que nous identifions géométriquement à un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Tout vecteur et tout point du plan sont ainsi identifiés à leurs coordonnées dans ce repère. On définit alors sur $\mathbb{R}^2$ deux lois de composition internes $\oplus$ et $\otimes$ de la façon suivante ; pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \otimes (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

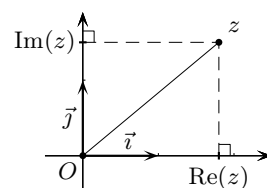
Par définition, en tant qu'il est muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ est noté $\mathbb{C}$ et ses éléments sont appelés *nombres complexes*.

- Remarquons alors que pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$: $(x, 0) \oplus (x', 0) = (x + x', 0)$ et $(x, 0) \otimes (x', 0) = (xx', 0)$. Ces égalités montrent que l'addition $\oplus$ et le produit $\otimes$ agissent sur les couples de la forme $(x, 0)$ comme l'addition $+$ et le produit $\times$ sur les réels. Nous pouvons donc identifier pour cette raison, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le couple $(x, 0)$ et le réel x — cela veut dire que nous noterons désormais x le couple $(x, 0)$. Cette identification nous permet de considérer $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{C}$. Géométriquement, $\mathbb{R}$ se trouve identifié à l'axe des abscisses du plan $\mathbb{R}^2$. Avec ce nouveau point de vue, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$: $x \oplus x' = (x, 0) \oplus (x', 0) = (x + x', 0) = x + x'$ et $x \otimes x' = (x, 0) \otimes (x', 0) = (xx', 0) = x \times x'$. Ces égalités montrent que les lois $\oplus$ et $\otimes$ généralisent à $\mathbb{C}$ les lois usuelles $+$ et $\times$ que nous connaissons sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons par conséquent sans risque d'ambiguïté noter $+$ la loi $\oplus$ et $\times$ la loi $\otimes$, et appeler ces lois respectivement *addition* et *multiplication* sur $\mathbb{C}$.

Définition (Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe)

- Soit $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Le réel x est appelé la *partie réelle* de z et noté $\text{Re}(z)$, et le réel y est appelé la *partie imaginaire* de z et noté $\text{Im}(z)$.

- Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $z = z' \iff \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \quad \text{et} \quad \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.



Nous avons choisi plus haut d'identifier le couple $(1, 0)$ au réel 1. Nous décidons à présent de noter i l'élément $(0, 1)$. Que vaut alors i^2 ? Facile : $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Progressivement, nous sommes bien en train de construire avec rigueur les nombres complexes « que nous connaissons ».

Théorème (Forme algébrique d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un et un seul couple (x, y) de réels tel que $z = x + iy$. En fait $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$.

Démonstration Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} z = x + iy &\iff z = (x, 0) + [(0, 1) \times (y, 0)] &\iff z = (x, 0) + (0, y) &\iff z = (x, y) \\ &\iff x = \text{Re}(z) \quad \text{et} \quad y = \text{Im}(z). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

 **En pratique** L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe est utilisée fréquemment pour faire des identifications. Elle permet, quand on a une égalité du type $a + ib = a' + ib'$, d'écrire que $a = a'$ et que $b = b'$. En particulier, reprenez bien l'idée suivante : une égalité de nombres complexes, c'est deux égalités de nombres réels.

Sans surprise : un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont ; réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle ; enfin, un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un *imaginaire pur*.

Définition (Affixe d'un point et d'un vecteur, image d'un nombre complexe)

- Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) . On appelle *affixe de M* le nombre complexe $x + iy$, et inversement M est appelé l'*image de $x + iy$* .
- Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) . On appelle *affixe de $\vec{u}$* le nombre complexe $x + iy$.

 **Explication** Dans la mesure où on a identifié $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$ et le plan euclidien, on a en réalité $M = \vec{u} = (x, y) = x + iy$. Ces quatre notations ont chacune leur utilité : il est parfois plus facile de penser en termes de points, parfois plus facile de penser en termes de nombres complexes, etc.

Le théorème suivant est une conséquence directe d'un théorème que nous avons démontré en géométrie élémentaire du plan.

Théorème (Règles de calcul sur les affixes)

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'axes respectifs u et v et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.
- Soient A et B d'axes respectifs a et b . Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(b - a)$.
- Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points d'axes respectifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels. On pose $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et on suppose $\Lambda \neq 0$. Le barycentre des points pondérés $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n)$ a pour affixe $\frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$.

Nous disposons finalement d'un quadruple point de vue sur un même objet mathématique : $\mathbb{R}^2$ est à la fois l'ensemble de couples de réels, le plan euclidien (constitué de points), l'ensemble des vecteurs du plan et l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Ainsi nous avons presque achevé notre construction de $\mathbb{C}$. Il ne nous reste plus qu'à démontrer les propriétés usuelles des lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$. Soient donc $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ et $z'' = x'' + iy''$ trois nombres complexes.

1) **Commutativité de $+$** : $z + z' = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x, y) = z' + z$.

2) **Commutativité de $\times$** : $zz' = (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') = (x'x - y'y, x'y + y'x) = (x', y') \times (x, y) = z'z$.

3) **Associativité de $+$** : L'ordre des parenthèses n'a pas d'importance quand on effectue des additions.

$$\begin{aligned} (z + z') + z'' &= [(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x + x', y + y') + (x'', y'') = ((x + x') + x'', (y + y') + y'') \\ &= (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) = (x, y) + (x' + x'', y' + y'') = (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')] = z + (z' + z''). \end{aligned}$$

4) **Associativité de $\times$** : L'ordre des parenthèses n'a pas d'importance quand on effectue des multiplications.

$$\begin{aligned} (zz')z'' &= [(x, y) \times (x', y')] \times (x'', y'') = (xx' - yy', xy' + yx') \times (x'', y'') \\ &= ((xx' - yy')x'' - (xy' + yx')y'', (xx' - yy')y'' + (xy' + yx')x'') \\ &= (x(x'x'' - y'y'') - y(x'y'' + y'x''), x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'' - y'y'')) \\ &= (x, y) \times (x'x'' - y'y'', x'y'' + y'x'') = (x, y) \times [(x', y') \times (x'', y'')] = z(z'z''). \end{aligned}$$

5) **Distributivité de $\times$ sur $+$** :

$$\begin{aligned} z(z' + z'') &= (x, y) \times [(x', y') + (x'', y'')] = (x, y) \times (x' + x'', y' + y'') = (x(x' + x'') - y(y' + y''), x(y' + y'') + y(x' + x'')) \\ &= ((xx' - yy') + (xx'' - yy''), (xy' + yx') + (xy'' + yx'')) = (xx' - yy', xy' + yx') + (xx'' - yy'', xy'' + yx'') \\ &= [(x, y) \times (x', y')] + [(x, y) \times (x'', y'')] = (zz') + (zz''). \end{aligned}$$

6) **Existence d'un élément neutre pour + :** Cet élément neutre unique est 0.

$$z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (x, y) = z \quad \text{et} \quad 0 + z = (0, 0) + (x, y) = (x, y) = z.$$

7) **Existence d'un élément neutre pour $\times$:** Cet élément neutre unique est 1.

$$z \times 1 = (x, y) \times (1, 0) = (x, y) = z \quad \text{et} \quad 1 \times z = (1, 0) \times (x, y) = (x, y) = z.$$

8) **Existence d'un inverse pour + :** Tout nombre complexe z possède un inverse unique pour + qu'on appelle son *opposé* : c'est $-1 \times z$, noté $-z$.

$$z + (-z) = (x, y) + [(-1, 0) \times (x, y)] = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0) = 0 \quad \text{et de même} \quad (-z) + z = 0.$$

9) **Existence d'un inverse pour $\times$:** Tout nombre complexe non nul $z = x + iy$ possède un inverse unique pour $\times$ qu'on appelle son... *inverse* : c'est $\frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, noté $\frac{1}{z}$ (z étant non nul, $x^2 + y^2 \neq 0$).

$$z \times \frac{1}{z} = (x, y) \times \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, -\frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0) = 1 \quad \text{et de même} \quad \frac{1}{z} \times z = 1.$$

🐞 🐞 🐞 **Explication** Pourquoi avons-nous dans le titre de cette partie qualifié $\mathbb{C}$ de « corps » en écrivant « le corps des nombres complexes » ? Nous aurons l'occasion d'étudier la notion de corps dans un prochain chapitre, mais en voici tout de même une rapide définition. Un *corps* est un ensemble muni de deux lois de composition internes, disons + et $\times$, qui vérifient toutes les propriétés que nous venons de passer en revue à l'instant : commutativité, associativité, distributivité, élément neutre, inverse. Par exemple, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont des corps pour leurs lois d'addition et de multiplication usuelles.

❌❌❌ **Attention !** Rappelons enfin que les inégalités n'ont aucun sens sur $\mathbb{C}$. Quel sens donner à la proposition « $i \leq i + 1$ » ? Une inégalité sur des complexes dans une copie est un crime impardonnable.

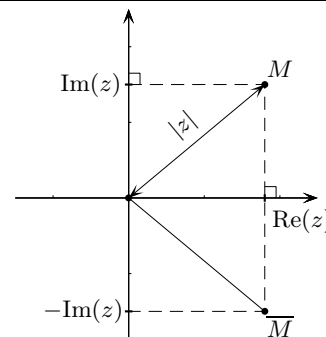
1.2 CONJUGUÉ ET MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition (Conjugué et module d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$.

- On appelle *conjugué* de z , noté $\bar{z}$, le nombre complexe $\text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$.
- On appelle *module* de z , noté $|z|$, le réel positif ou nul $\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$.

🐞 🐞 🐞 **Explication**

- Ces deux notions ont une interprétation géométrique très naturelle : si nous notons M l'image de z et $\bar{M}$ celle de $\bar{z}$, alors $\bar{M}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) et $|z| = OM$. Plus généralement, si A et B sont deux points du plan d'affixes respectifs a et b , alors $|b - a| = AB$.
- La fonction module coïncide avec la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$, c'est pourquoi leurs notations sont identiques. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$.



Théorème Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- Propriétés des parties réelle et imaginaire :** $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

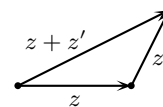
$$|\text{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\text{Im}(z)| \leq |z|.$$

- Propriétés de la conjugaison :** $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ et $|\bar{z}| = |z|$.

- Propriétés du module :** $z\bar{z} = |z|^2$, $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ et si $z' \neq 0$: $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Egalement : $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

$$\text{Inégalité triangulaire :} \quad \left| |z| - |z'| \right| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|.$$



🔧 🔧 🔧 **En pratique** Pour calculer l'inverse d'un nombre complexe $z = x + iy \neq 0$, c'est toujours la formule « $z\bar{z} = |z|^2$ » qu'il faut utiliser : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Démonstration Contentons-nous de démontrer l'inégalité triangulaire $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$. Pour démontrer cette inégalité avec $|z - z'|$ à la place de $|z + z'|$, remplacer z' par $-z'$.

- On part de l'inégalité $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| = |z| \cdot |\bar{z}'| = |z| \cdot |z'|$ que l'on sait être vraie.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z| \cdot |z'| &\iff \frac{z\bar{z}' + \bar{z}z'}{2} \leq |z| \cdot |z'| &\iff \overset{\text{réel!}}{z\bar{z}' + \bar{z}z'} \leq 2|z| \cdot |z'| \\ &\iff |z|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |z'| + |z'|^2 \\ &\iff z\bar{z}' + \bar{z}z' + z'z' \leq (|z| + |z'|)^2 &\iff (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \leq (|z| + |z'|)^2 \\ &\iff |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 &\iff |z + z'| \leq |z| + |z'|. \end{aligned}$$

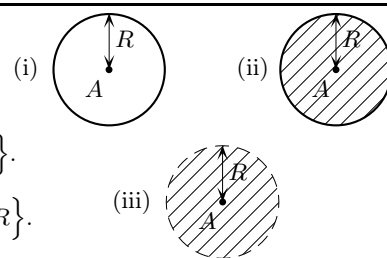
L'inégalité de droite est ainsi démontrée. Remarquez bien que, contrairement aux apparences, nous travaillons bien avec des inégalités sur des réels, puisque $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \in \mathbb{R}$. Pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$!

- L'inégalité de gauche en découle : $|z| = |(z + z') + (-z')| \leq |z + z'| + |-z'|$, d'où : $|z| - |z'| \leq |z + z'|$. Permutant les rôles de z et z' , on obtient de même : $|z'| - |z| \leq |z + z'|$. ■

La notion de module d'un nombre complexe permet une description aisée des cercles et des disques dans le plan complexe.

Théorème (Cercles, disques et affixes) Soit A un point d'affixe a et $R \in \mathbb{R}_+^*$.

- (i) Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z - a| = R\}$.
- (ii) Le disque fermé de centre A et de rayon R est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leq R\}$.
- (iii) Le disque ouvert de centre A et de rayon R est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z - a| < R\}$.



2 LE GROUPE $\mathbb{U}$ DES NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Définition (Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1) On note $\mathbb{U}$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

🔗 🔗 🔗 Explication

- Bref : $\mathbb{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, le cercle trigonométrique !
- Pourquoi qualifier $\mathbb{U}$ de « groupe » dans la définition précédente ? Nous aurons l'occasion d'étudier la notion de groupe dans un prochain chapitre, mais en voici tout de même une définition. Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi de composition interne, disons $\odot$, qui vérifie quelques propriétés intéressantes :

- $\odot$ est *associative* : $\forall g, g', g'' \in G, g \odot (g' \odot g'') = (g \odot g') \odot g''$;
- $\odot$ possède un *élément neutre*, disons e : $\forall g \in G, g \odot e = e \odot g = g$;
- tout élément de G possède un *inverse pour $\odot$* : $\forall g \in G, \exists g' \in G / g \odot g' = g' \odot g = e$.

Dans le cas présent, $\mathbb{U}$ est un groupe pour la loi $\times$ de multiplication des nombres complexes. On peut bien dire que $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{U}$ car le produit de deux nombres complexes de module 1 est un nombre complexe de module 1 — ou encore : le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$.

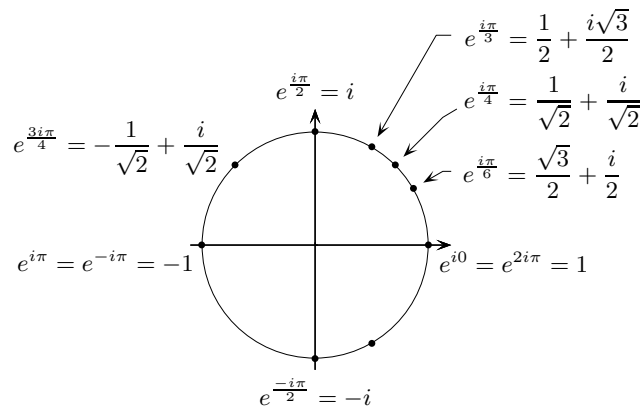
Définition (Exponentielle « $i\theta$ ») Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *exponentielle (de) $i\theta$* , notée $e^{i\theta}$, le nombre complexe :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

🔗 🔗 🔗 **Explication** La notation $e^{i\theta}$, qui cache un cosinus et un sinus, n'est qu'une notation : $e^{i\theta}$ n'est pas « e à la puissance $i\theta$ » au sens où ce serait « e multiplié par lui-même $i\theta$ fois », ce qui n'a aucun sens ! Quel rapport avec l'exponentielle classique alors ? Le choix de la notation $e^{i\theta}$ est justifié par l'assertion (iii) du théorème suivant, où l'on montre que $e^{i\theta}$ se comporte **COMME** une exponentielle classique. En réalité, une notion unique d'exponentielle se cache derrière l'exponentielle réelle et l'exponentielle « $i\theta$ », mais ce n'est pas encore de votre âge !

En pratique

Il est indispensable que vous connaissiez sur le bout des doigts certaines valeurs remarquables de l'exponentielle « $i\theta$ », en l'occurrence les valeurs attachées aux mesures d'angle $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, etc.



Théorème (Propriétés algébriques de l'exponentielle « $i\theta$ ») Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- (i) **Conjugaison :** $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}.$
- (ii) **Formules d'Euler :** $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$
- (iii) **Transformation des sommes en produits :** $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$
- (iv) **Formule de Moivre :** $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$

Démonstration

(ii) Tout simplement, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$

(iii) Facile : $e^{i\theta} e^{i\theta'} = [\cos \theta + i \sin \theta] \times [\cos \theta' + i \sin \theta'] = [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'] + i[\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'] = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = e^{i(\theta+\theta')}.$

(iv) A partir de (iii), on peut facilement montrer par récurrence l'égalité $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. La formule de Moivre, ce n'est que ça ! ■

Théorème (Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par l'exponentielle « $i\theta$ »)

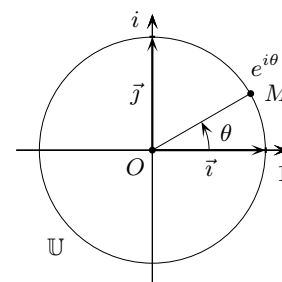
- Pour tout nombre complexe z : $z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R} / z = e^{i\theta}.$
- Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $(e^{i\theta} = e^{i\theta'} \implies \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}).$

🐞 🐞 🐞 **Explication** Le premier point signifie que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / \exists \theta \in \mathbb{R} / z = e^{i\theta}\} = \{e^{i\theta}\}_{\theta \in \mathbb{R}}.$

Ce résultat n'est rien de plus que la version « nombres complexes » de la paramétrisation cartésienne trigonométrique du cercle trigonométrique ; pour tout point M de coordonnées (x, y) :

$$M \text{ appartient au cercle trigonométrique} \iff \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta. \end{cases}$$

Cette explication tient d'ailleurs lieu de démonstration.



Définition (Arguments et forme trigonométrique d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul.

- Alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Il existe donc un réel θ , unique à 2π près, tel que $z = |z|e^{i\theta}$. Un tel réel θ est appelé un argument de z . Il existe un unique argument de z dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$: on l'appelle l'argument principal de z et on le note $\arg(z)$.
- L'écriture « $z = |z|e^{i \arg(z)}$ » est appelée la *forme trigonométrique* de z . Géométriquement, $(|z|, \arg(z))$ est un couple de coordonnées polaires de l'image de z .

❌ ❌ ❌ **Attention !** Notez bien que zéro n'a pas d'argument, et qu'en général, faute d'unicité, on parle d'un argument.

Théorème (Propriétés des arguments) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls.

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}, \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

Démonstration Pour la seconde égalité : $z = |z| e^{i \arg(z)}$ et $z' = |z'| e^{i \arg(z')}$, donc par produit : $zz' = |z| e^{i \arg(z)} \times |z'| e^{i \arg(z')} = |zz'| e^{i(\arg(z) + \arg(z'))}$, mais par ailleurs $zz' = |zz'| e^{i \arg(zz')}$. L'« unicité » à 2π près des arguments montre comme voulu la congruence : $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$. ■

Exemple Le nombre complexe $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ admet $\frac{\pi}{12}$ pour argument car : $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2 e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}}$.

On connaît pour le moment deux notions d'exponentielles : la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et l'exponentielle « $i\theta$ ». On définit enfin ci-dessous l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier à partir des deux précédentes.

Définition (Exponentielle complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$ donné sous forme algébrique $z = x + iy$. On appelle *exponentielle* (de) z , notée e^z , le nombre complexe $e^z = e^x e^{iy}$.

Exemple $e^{2 + \frac{i\pi}{4}} = e^2 e^{\frac{i\pi}{4}} = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + \frac{ie^2}{\sqrt{2}}$.

Théorème (Propriétés de l'exponentielle complexe)

- **Périodicité** : L'exponentielle complexe est $2i\pi$ -périodique ; pour tout $z \in \mathbb{C}$: $e^{z+2i\pi} = e^z$.
- **Equation fonctionnelle** : Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
L'exponentielle transforme les sommes en produits.

Démonstration Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $e^{z+2i\pi} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)+2i\pi} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)} = e^z$ et :

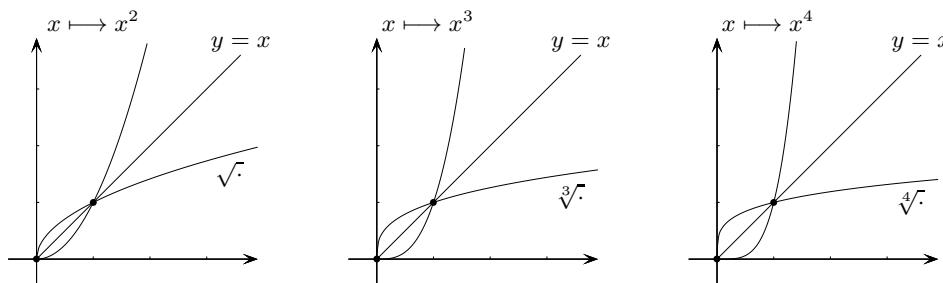
$$e^{z+z'} = e^{\operatorname{Re}(z+z')} e^{i\operatorname{Im}(z+z')} = e^{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Re}(z')} e^{i\operatorname{Im}(z)+i\operatorname{Im}(z')} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Re}(z')} e^{i\operatorname{Im}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z')} = e^z e^{z'}. \quad \blacksquare$$

3 RACINES $n^{\text{èmes}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, nous supposons connue la fonction *racine $n^{\text{ème}}$* $\sqrt[n]{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est définie de la façon suivante ; pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n.$$

Pour $n = 2$, on parle de *racine carrée* et on note simplement $\sqrt{\cdot}$, et pour $n = 3$, de *racine cubique*. Nous reviendrons sur ces fonctions dans de prochaines aventures. Notez bien — c'est un principe général — que la courbe représentative d'une fonction réciproque est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de la courbe représentative de la fonction de départ.



Définition (Racines $n^{\text{èmes}}$)

- Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine $n^{\text{ème}}$* de z tout nombre complexe ζ tel que $z = \zeta^n$.
- Les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 sont généralement appelées les *racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité*. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Attention !



Notation autorisée si $x \in \mathbb{R}_+$.



La plus interdite des notations interdite si $z \in \mathbb{C}$ n'est pas réel positif ou nul !

Et pourquoi donc cet interdit ? Parce que le théorème suivant montre qu'il existe toujours **plusieurs** racines $n^{\text{èmes}}$ de z si $z \neq 0$ — exactement n . Laquelle voulons-nous noter $\sqrt[n]{z}$? Toutes se valent a priori, donc pas de notation. Seule exception : si $x \in \mathbb{R}_+$, x possède une et une seule racine carrée positive ou nulle, et c'est elle qu'on note $\sqrt{x}$.

Théorème Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La seule racine $n^{\text{ème}}$ de 0 est 0.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ **non nul**, donné sous une forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$. Alors z possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$. Ce sont les nombres complexes $\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}$, k décrivant l'ensemble $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- **Cas particulier des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité :** $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right\}_{0 \leq k \leq n-1}$.

Attention ! Ce théorème est vital : il est impératif que vous le maîtrisiez parfaitement.

Démonstration Le cas du nombre 0 est une idiotie, car un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est. Pour traiter les autres cas, nous allons commencer par travailler sur les racines de l'unité. Nous généraliserons ensuite à partir de ce cas.

- **Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité :** Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Posons $\rho = |\omega|$ et notons φ l'unique argument de ω dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Par « unicité » de la forme trigonométrique des nombres complexes :

$$\begin{aligned} \omega^n = 1 &\iff (\rho e^{i\varphi})^n = 1 &\iff \rho^n e^{in\varphi} = 1.e^{i.0} \\ &\iff \rho^n = 1 \text{ et } n\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi} &\iff \rho = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} / n\varphi = 2k\pi \\ &\iff \rho = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} / \varphi = \frac{2k\pi}{n} &\iff \rho = 1 \text{ et } \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \varphi = \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

On a pu remplacer $\mathbb{Z}$ par $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, car $\varphi \in [0, 2\pi[$. Nous avons donc obtenu l'équivalence suivante :

$$\omega^n = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad \text{comme voulu.}$$

Cela nous fait au total n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, car les exponentielles ainsi obtenues sont toutes distinctes.

- **Cas général :** Soit $z \in \mathbb{C}$ **non nul**, donné sous une forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$. On pose $\zeta = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$. Il est immédiat que $\zeta^n = z$, et ζ est non nul puisque z ne l'est pas. Nous disposons donc d'au moins une racine $n^{\text{ème}}$ de z . Nous allons trouver toutes les autres à partir d'elle. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \omega^n = z &\iff \omega^n = \zeta^n &\iff \left(\frac{\omega}{\zeta}\right)^n = 1 \quad (\zeta \neq 0) \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \frac{\omega}{\zeta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \omega = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

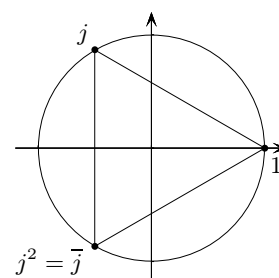
Exemple Les racines cubiques de $1+i$ sont $\sqrt[6]{2} e^{\frac{i\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $\sqrt[6]{2} e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

En effet Tout simplement : $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$. Il suffit alors d'appliquer la formule du théorème : les racines cubiques de $1+i$ sont les trois nombres $\sqrt[3]{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{12} + \frac{2ik\pi}{3}}$, k décrivant l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

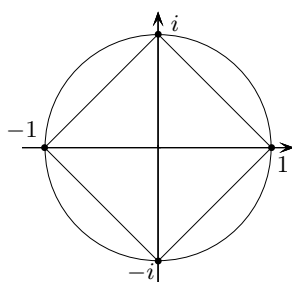
Explication Tâchons de visualiser ce théorème au moyen de quelques dessins.

- A quoi ressemblent les racines cubiques de l'unité ?

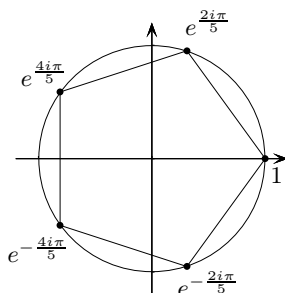
Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ — **notation à connaître**. Alors $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Graphiquement, $\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des trois sommets du triangle équilatéral représenté ci-contre.



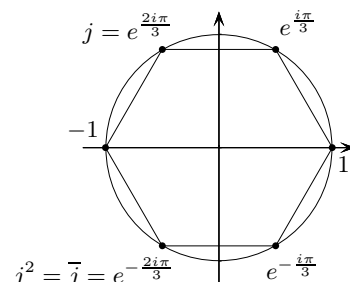
- Plus généralement, $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des sommets du polygone régulier — i.e. à côtés de même longueur — à n côtés, de centre O et passant par le point d'affixe 1.



$\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets d'un carré



$\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier

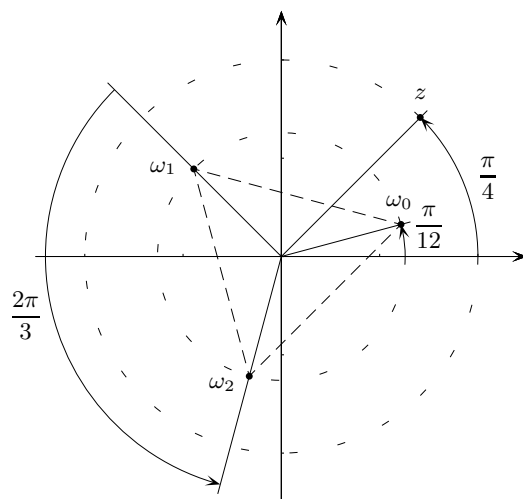


$\mathbb{U}_6$ est l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier

- Et la formule « $\sqrt[n]{r} e^{i\theta/n + \frac{2ik\pi}{n}}$ », elle raconte quoi ?

Tâchons de le comprendre sur l'exemple explicite de $z = 2e^{i\pi/4}$ et $n = 3$. Les racines cubiques de z sont $\omega_0 = \sqrt[3]{2} e^{i\pi/12}$, $\omega_1 = \sqrt[3]{2} e^{i\pi/12 + \frac{2i\pi}{3}}$ et $\omega_2 = \sqrt[3]{2} e^{i\pi/12 + \frac{4i\pi}{3}}$. Sur la figure ci-contre, le grand cercle en pointillé a pour rayon 2 et le petit $\sqrt[3]{2}$.

Multiplié par $\sqrt[3]{2} e^{i\pi/12}$, le triangle $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ se trouve dilaté d'un facteur $\sqrt[3]{2}$ et tourné d'un angle de mesure $\frac{\pi}{12}$. C'est ainsi qu'il devient $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$.



Théorème (Propriétés des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

- (i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = z^n - 1$ et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (z - \omega) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$.
- (ii) La somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle, i.e. : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$. En particulier, $1 + j + j^2 = 0$.

🐦 🐦 🐦 **Explication** La formule (ii) s'interprète géométriquement : l'isobarycentre des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité n'est autre que le centre du polygone régulier $\mathbb{U}_n$, à savoir 0, et il a pour affixe $\frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

Démonstration

- (i) Nous démontrerons ces égalités avec plus de rigueur dans le chapitre sur les polynômes. Remarquons simplement ici que les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont exactement les racines du polynôme $z \mapsto z^n - 1$. Cela explique — à peu près — qu'on ait : $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = z^n - 1$. On obtient la seconde identité en divisant la première par $(z - 1)$ — sauf bien sûr quand $z = 1$, mais nous reverrons cela plus tard.

- (ii) Puisque $n \neq 1$, $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$. Du coup : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{(e^{\frac{2i\pi}{n}})^n - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = 0$. ■

🔧 🔧 🔧 **En pratique** Quand on me donne un nombre complexe sous forme trigonométrique « $re^{i\theta}$ », je sais calculer ses racines $n^{\text{èmes}}$ grâce à la formule « $\sqrt[n]{r} e^{i\theta/n + \frac{2ik\pi}{n}}$ ». Mais que faire si on me donne au départ une **forme algébrique** ? Nous allons voir qu'on peut alors calculer facilement les racines **carrées**.

Soit donc $z \in \mathbb{C}$ donné sous forme algébrique $z = x + iy$. Nous voulons calculer les racines carrées de z , i.e. résoudre l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ donnée sous forme algébrique $\omega = a + ib$. L'idée géniale de la méthode est cachée dans l'équivalence suivante : $\omega^2 = z \iff \omega^2 = z \text{ et } |\omega|^2 = |z|$. Cette équivalence peut paraître idiote, mais c'est pourtant grâce à elle que nous allons réussir notre calcul.

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\iff \omega^2 = z \text{ et } |\omega|^2 = |z| &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \text{ et } a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\
&\iff a^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \text{ et } b^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \text{ et } 2ab = y \\
&\quad \text{(effectuer la demi-somme et la demi-différence des équations } a^2 + b^2 = \dots \text{ et } a^2 - b^2 = \dots)
\end{aligned}$$

Le résultat obtenu semble compliqué, mais on en tire aisément les valeurs de a et b : les égalités $a^2 = \dots$ et $b^2 = \dots$ nous permettent de connaître a et b au signe près ; pour savoir si a et b sont de même signe ou de signes contraires, on utilise l'égalité $2ab = y$. On obtient finalement, si $z \neq 0$, deux racines carrées ω distinctes **opposées** de z .

Exemple Les racines carrées de $12 + 5i$ sont $\pm \frac{5+i}{\sqrt{2}}$.

En effet Soit $\omega \in \mathbb{C}$, donné sous forme algébrique $\omega = a + ib$.

$$\begin{aligned}
\omega^2 = 12 + 5i &\iff \omega^2 = 12 + 5i \text{ et } |\omega|^2 = |12 + 5i| &\iff \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{12^2 + 5^2} \\ a^2 - b^2 = 12 \\ 2ab = 5 \end{cases} \\
&\iff a^2 + b^2 = 13, \quad a^2 - b^2 = 12 \text{ et } 2ab = 5 &\iff a^2 = \frac{13+12}{2}, \quad b^2 = \frac{13-12}{2} \text{ et } 2ab = 5 \\
&\iff a = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } 2ab = 5 &\stackrel{2ab=5>0}{\iff} (a, b) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } (a, b) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\iff \omega = \frac{5+i}{\sqrt{2}} \text{ ou } \omega = -\frac{5+i}{\sqrt{2}} \text{ comme annoncé.}
\end{aligned}$$

Grâce à la technique précédente, nous pouvons maintenant résoudre les équations du second degré à **coefficients complexes**.

Théorème (Equation du second degré à coefficients complexes) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont $\frac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$.
La somme de ces solutions vaut $-\frac{b}{a}$ et leur produit $\frac{c}{a}$.

Démonstration Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

$$= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\delta}{2a} \right] \cdot \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\delta}{2a} \right] = a \left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right).$$

Pour finir, on sait qu'un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est. ■

Exemple Les solutions de l'équation $4z^2 + 8z\sqrt{3} - 5i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont $-\sqrt{3} \pm \frac{5+i}{2\sqrt{2}}$.

En effet Le discriminant de cette équation du second degré est $(8\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5i) = 16(12 + 5i)$. Or nous avons trouvé tout à l'heure les racines carrées de $12 + 5i = \frac{5+i}{\sqrt{2}}$ par exemple — donc $\delta = 4 \times \frac{5+i}{\sqrt{2}}$ est une racine carrée de notre discriminant. Les solutions recherchées sont donc bien $\frac{-8\sqrt{3} \pm \delta}{2 \cdot 4} = -\sqrt{3} \pm \frac{5+i}{2\sqrt{2}}$.

4 QUELQUES TECHNIQUES CALCULATOIRES À CONNAÎTRE

4.1 LINÉARISATION D'EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES

   **En pratique**

- Linéariser une expression polynomiale en $\sin x$ et $\cos x$ — par exemple $5 \sin^4 x \cos^7 x - 2 \sin x \cos^4 x$ — c'est l'exprimer à l'aide de $\sin x, \sin(2x), \sin(3x), \dots$ et $\cos x, \cos(2x), \cos(3x), \dots$ en supprimant toutes les puissances et tous les produits. Deux outils fondamentaux sont ici requis : 1) les formules d'Euler ; 2) la formule du binôme de Newton.
- L'une des applications classiques de la linéarisation concerne les intégrales de la forme $\int_a^b \sin^m x \cos^n x \, dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Sauf dans certains cas particuliers, on ne sait pas en général calculer directement une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^m x \cos^n x$ sur $\mathbb{R}$. On sait en revanche le faire sans problème une fois qu'on a linéarisé.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin^5 x = \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x}{16}$.

En effet Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **Première étape :** On remplace $\sin x$ grâce à la formule d'Euler pour le sinus, puis on développe grâce à la formule du binôme de Newton.

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{32i} (e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}).$$

- **Seconde étape :** On regroupe les puissances de e^{ix} , puis on se sert des formules d'Euler dans l'autre sens.

$$\sin^5 x = \frac{1}{32i} ((e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})) = \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x}{16}.$$

Exemple $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{\pi}{8}$.

En effet Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **Première étape :** On remplace $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide des formules d'Euler, puis on développe grâce à la formule du binôme de Newton les deux parenthèses ainsi obtenues ; finalement on développe de nouveau.

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = -\frac{1}{64} (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= -\frac{1}{64} (e^{6ix} + 2e^{4ix} - e^{2ix} - 4 - e^{-2ix} + 2e^{-4ix} + e^{-6ix}). \end{aligned}$$

- **Seconde étape :** On regroupe les puissances de e^{ix} , puis on se sert des formules d'Euler dans l'autre sens.

$$\sin^2 x \cos^4 x = -\frac{1}{64} ((e^{6ix} + e^{-6ix}) + 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) - 4) = \frac{-\cos(6x) - 2\cos(4x) + \cos(2x) + 2}{32}.$$

- **Troisième étape :** Le calcul de l'intégrale !

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} (-\cos(6x) - 2\cos(4x) + \cos(2x) + 2) \, dx = \frac{1}{32} \left[-\frac{\sin(6x)}{6} - 2\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{2} + 2x \right]_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

  **En pratique** On a moins souvent l'occasion de le faire, mais on peut aussi « dé-linéariser » les expressions trigonométriques, i.e. effectuer la transformation inverse de la linéarisation. Deux outils dans ce cas : 1) la formule de Moivre ; 2) la formule du binôme de Newton.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(6x) = 2(3 - 16\cos^2 x + 16\cos^4 x) \cos x \sin x$.

En effet Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(6x) = \operatorname{Im}(e^{6ix}) = \operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^6)$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Im}(\cos^6 x + 6i \cos^5 x \sin x - 15 \cos^4 x \sin^2 x - 20i \cos^3 x \sin^3 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x + 6i \cos x \sin^5 x - \sin^6 x) \\ &= 6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x. \end{aligned}$$

On pourrait s'arrêter là, mais on va tâcher d'embellir le résultat.

$$\begin{aligned} \sin(6x) &= 2(3 \cos^4 x - 10 \cos^2 x \sin^2 x + 3 \sin^4 x) \cos x \sin x = 2(3 \cos^4 x - 10 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + 3(1 - \cos^2 x)^2) \cos x \sin x \\ &= 2(3 - 16 \cos^2 x + 16 \cos^4 x) \cos x \sin x \quad \text{après développement.} \end{aligned}$$

4.2 TECHNIQUE DE L'ANGLE MOITIÉ

  **En pratique** Pour effectuer des factorisations d'expressions en sinus et cosinus, on dispose d'une technique appelée la *technique de l'angle moitié*, qui consiste à écrire les complexes de la forme $e^{ix} + e^{iy}$ sous forme trigonométrique. L'idée est simple ; pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{(x+y)}{2}} \left(e^{i\frac{(x-y)}{2}} + e^{-i\frac{(x-y)}{2}} \right) = 2e^{i\frac{(x+y)}{2}} \cos \frac{x-y}{2}.$$

→ Mise en facteur de l'angle moitié $\frac{x+y}{2}$

En réalité on n'obtient pas ainsi forcément la forme trigonométrique de $e^{ix} + e^{iy}$ car $\cos \frac{x-y}{2}$ peut être négatif, mais on n'en est pas loin. Cette technique s'adapte bien sûr au cas des complexes de la forme $e^{ix} - e^{iy}$.

Exemple Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \begin{cases} \frac{\sin((n+1)x) \cos(nx)}{\sin x} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

En effet Vous devez à tout prix savoir refaire cette démonstration, car l'exercice est très classique.

Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(2kx) = 1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et donc $\sum_{k=0}^n \cos(2kx) = n+1$ comme annoncé. Supposons désormais que $x \notin \pi\mathbb{Z}$, de sorte que $e^{2ix} \neq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{2ikx}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) \stackrel{e^{2ix} \neq 1}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{2ix} - 1}\right) \stackrel{\text{Angle moitié}}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x}(e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x})}{e^{ix}(e^{ix} - e^{-ix})}\right) \\ &\stackrel{\text{Formule d'Euler}}{=} \operatorname{Re}\left(e^{inx} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} \operatorname{Re}(e^{inx}) = \frac{\sin((n+1)x) \cos(nx)}{\sin x}. \quad \text{C'est terminé.} \end{aligned}$$

5 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE PLANE

5.1 ANGLES, RAPPORTS DE DISTANCE, PRODUIT SCALAIRE ET DÉTERMINANT

Théorème (Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$) Soient $a, b, z \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq a$ et $z \neq b$. On note A l'image de a , B celle de b et M celle de z .

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \frac{MB}{MA} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}.$$

 **En pratique** On peut ainsi démontrer l'alignement de A , B et M ou l'orthogonalité des droites (AM) et (BM) .

$$A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}.$$

$$(AM) \text{ et } (BM) \text{ sont orthogonales} \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff \frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}.$$

Théorème (Produit scalaire, déterminant et affixes) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectifs u et v .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(\bar{u}v) \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{Im}(\bar{u}v).$$

Démonstration Notons $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ les formes algébriques de u et v respectivement.

$$\bar{u}v = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - yx') = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + i \det(\vec{u}, \vec{v}). \quad \blacksquare$$

5.2 TRANSFORMATIONS USUELLES

Théorème (Transformations usuelles élémentaires) Soient M un point d'affixe z . Soient en outre $\vec{u}$ un vecteur d'affixe u , Ω un point d'affixe ω et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

- (i) L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour affixe le nombre complexe $z + u$.
- (ii) L'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport λ a pour affixe le nombre complexe $\omega + \lambda(z - \omega)$.
- (iii) L'image de M par la symétrie centrale de centre Ω a pour affixe le nombre complexe $2\omega - z$.
- (iv) L'image de M par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (Ox) a pour affixe le nombre complexe $\bar{z}$.
- (v) L'image de M par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) a pour affixe le nombre complexe $-\bar{z}$.
- (vi) L'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ a pour affixe le nombre complexe $\omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.

Démonstration

- (i) La translation de vecteur $\vec{u}$ envoie M sur un certain point M' défini par : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + u$. En termes d'affixes, si z' est l'affixe de M' , nous obtenons comme voulu l'égalité : $z' = z + u$.
- (ii) L'homothétie de centre Ω et de rapport λ envoie M sur un certain point M' défini par : $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$. En termes d'affixes, si z' est l'affixe de M' , nous obtenons comme voulu l'égalité : $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.
- (iii) La symétrie centrale de centre O n'est autre que l'homothétie de centre O et de rapport -1 — utiliser l'assertion (ii).
- (v) La symétrie par rapport à (Oy) n'est autre que la composée de la symétrie par rapport à (Ox) et de la symétrie centrale par rapport à O — utiliser les assertions (iii) et (iv).
- (vi) La rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ envoie M sur un certain point M' défini par les deux relations : $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$ — du moins pour $M \neq \Omega$. En termes d'affixes, si z' est l'affixe de M' : $|z' - \omega| = |z - \omega|$ et $\arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}$. D'où enfin : $z' - \omega = |z - \omega| e^{i \arg(z' - \omega)} = |z - \omega| e^{i \arg(z - \omega) + i\theta} = e^{i\theta} (z - \omega)$. Expression valable aussi si $z = \omega$, car dans ce cas $z' = \omega$. ■

Exemple L'homothétie de centre $\Omega = i$ et de rapport 2 est l'application $z \mapsto 2z - i$.

En effet Soit M un point d'affixe notée z . Notons M' l'image de M par l'homothétie étudiée et z' l'affixe de M' . Alors M' est défini par : $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$, ou encore, en termes d'affixes : $z' - i = 2(z - i)$, i.e. $z' = 2z - i$.

Exemple La rotation de centre $A = 2 + i$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$ est l'application $z \mapsto -iz + 1 + 3i$.

En effet Soit M un point d'affixe notée z . Notons M' l'image de M par la rotation étudiée et z' l'affixe de M' . Alors $z' = (2 + i) + e^{-\frac{i\pi}{2}}(z - 2 - i) = -i(z - 2 - i) + 2 + i = -iz + 1 + 3i$ comme voulu.

5.3 SIMILITUDES ET ISOMÉTRIES

Définition (Similitude, isométrie)

- Soit $\lambda > 0$. On appelle *similitude (plane) de rapport λ* toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M, N :

$$f(M)f(N) = \lambda MN.$$

- On appelle *isométrie (plane)* toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M, N :

$$f(M)f(N) = MN.$$

☞ ☞ ☞ **Explication** Une isométrie est une application qui préserve les distances — étymologiquement, « iso-métrie » signifie « même mesure ». Une similitude est une application qui multiplie les distances par un rapport constant. Clairement, toute isométrie est une similitude de rapport 1.

Exemple Les translations, les rotations et les symétries axiales sont des isométries. Les homothéties sont des similitudes.

Le théorème suivant montre que les similitudes, observées depuis le monde des complexes, sont des transformations simples.

Théorème (Caractérisation complexe des similitudes/isométries planes)

- (i) Les similitudes planes sont exactement les applications de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
- (ii) Les isométries planes sont exactement les applications de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$.

Démonstration

- (i) Il est clair que toute application de la forme $z \mapsto az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, est une similitude, car pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $|(az' + b) - (az + b)| = |a| \cdot |z' - z|$ — le rapport de la similitude est précisément $|a|$. Même chose pour les applications de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$.

Réciproquement, soit f une similitude de rapport $\lambda > 0$. Nous voulons montrer que f est soit de la forme $z \mapsto az + b$, soit de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Preuve en plusieurs étapes.

- Puisque f est une similitude : $|f(1) - f(0)| = \lambda|1 - 0| = \lambda > 0$. Par conséquent $f(0) \neq f(1)$.

Nous pouvons donc poser, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}$. Alors pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$|g(z') - g(z)| = \left| \frac{f(z') - f(0)}{f(1) - f(0)} - \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)} \right| = \left| \frac{f(z') - f(z)}{f(1) - f(0)} \right| = \frac{|f(z') - f(z)|}{|f(1) - f(0)|} = \frac{\lambda|z' - z|}{\lambda|1 - 0|} = |z' - z|.$$

Ce calcul montre que g est une isométrie. Nous allons étudier g pour obtenir des informations sur f . Remarquons qu'on a $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

- Montrons que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad (g(z) = z \text{ ou } g(z) = \bar{z})$.

Fixons $z \in \mathbb{C}$. Introduisons les formes algébriques de z et $g(z)$: $z = x + iy$ et $g(z) = x' + iy'$, où $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Puisque g est une isométrie et puisque $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, alors :

$$|g(z)| = |g(z) - g(0)| = |z - 0| = |z| \quad \text{et} \quad |g(z) - 1| = |g(z) - g(1)| = |z - 1|.$$

Ces deux égalités nous conduisent à un système de deux équations :

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \\ (x' - 1)^2 + y'^2 = (x - 1)^2 + y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \\ x' = x \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 - \frac{1}{2} L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = \pm y \end{cases}.$$

Ceci montre comme voulu que $g(z) = x' + iy' = x + iy = z$ ou $g(z) = x' + iy' = x - iy = \bar{z}$.

- Montrons que : $(\forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) = z) \quad \text{ou} \quad (\forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) = \bar{z})$.

Nous venons de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $g(z)$ vaut z ou $\bar{z}$. Mais on peut avoir a priori $g(z) = z$ pour certains z et $g(z') = \bar{z}$ pour d'autres z . Il s'agit maintenant de montrer qu'on a soit **toujours** $g(z) = z$, soit **toujours** $g(z) = \bar{z}$ — résultat beaucoup plus fort. Remarquons qu'en vertu du point précédent, on a soit $g(i) = i$, soit $g(i) = \bar{i} = -i$.

- 1) Supposons d'abord que $g(i) = i$ et montrons qu'alors pour tout $z \in \mathbb{C}$: $g(z) = z$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Faisons l'hypothèse que $g(z) = \bar{z}$. Alors $|\bar{z} - i| = |g(z) - g(i)| = |z - i|$, i.e. $|z + i| = |z - i|$. Cette égalité signifie que z est équidistant des points i et $-i$, donc que z est situé sur leur médiatrice qui est l'axe des réels. Ainsi $z \in \mathbb{R}$ et donc $g(z) = \bar{z} = z$.

- 2) On montrerait de même que si $g(i) = -i$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$: $g(z) = \bar{z}$.

- Posons pour conclure $a = f(1) - f(0) \neq 0$ et $b = f(0)$. Par définition de g : $g(z) = \frac{f(z) - b}{a}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'après le dernier point, f est soit la fonction $z \mapsto az + b$, soit la fonction $z \mapsto a\bar{z} + b$. Fin de la preuve.

- (ii) Les isométries sont exactement toutes les similitudes de rapport 1. Or toute similitude est de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Mais nous avons vu par ailleurs que le rapport d'une telle similitude est $|a|$. Les isométries sont donc comme voulu toutes les applications de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$. ■

Définition (Similitude plane directe/indirecte)

- (i) Toute similitude plane de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ préserve les angles orientés de vecteurs. Une telle similitude est dite *directe*.
- (ii) Toute similitude plane de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ transforme tout angle orienté de vecteurs en son opposé. Une telle similitude est dite *indirecte*.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Ce résultat est tout à fait non trivial : il n'était pas du tout évident, quand nous avons défini la notion de similitude, qu'une application qui multiplie les distances par un rapport constant préserve ou renverse les angles orientés.

Démonstration

- (i) Soit f une similitude directe, disons $z \mapsto az + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Soient U, V, W trois points d'affixes respectives u, v, w , $U \neq V$ et $U \neq W$. Leurs images respectives par f sont notées U', V', W' , d'affixes u', v', w' . Alors $U' \neq V'$ et $U' \neq W'$ car $u' = au + b \neq av + b = v'$ et $u' = au + b \neq aw + b = w'$.

$$\frac{u' - w'}{u' - v'} = \frac{(au + b) - (aw + b)}{(au + b) - (av + b)} = \frac{a(u - w)}{a(u - v)} = \frac{u - w}{u - v}, \quad \text{et donc :} \quad \arg \left(\frac{u' - w'}{u' - v'} \right) \equiv \arg \left(\frac{u - w}{u - v} \right) \pmod{2\pi}.$$

Conclusion : $(\overrightarrow{U'V'}, \overrightarrow{U'W'}) \equiv (\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW}) \pmod{2\pi}$. Comme voulu, f préserve les angles orientés.

- (ii) Imiter la preuve de l'assertion (i). ■

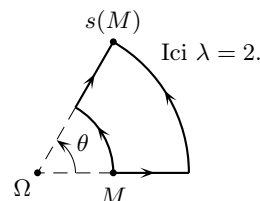
Exemple Les translations, les rotations et les homothéties sont des similitudes directes. Les symétries axiales sont quant à elles indirectes.

Théorème (Caractérisation géométrique des similitudes/isométries planes directes)

- (i) Toute similitude plane directe est soit une translation, soit la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation de même centre. Dans ce second cas, si f est la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda > 0$ et d'une rotation de même centre Ω et d'angle de mesure θ , alors on dit que f est la *similitude (directe) de centre Ω , de rapport λ et d'angle de mesure θ* .
- (ii) Toute isométrie plane directe est soit une translation, soit une rotation.

🐼 🐼 🐼 **Explication**

- Encore un résultat non trivial. Dans le cas des isométries par exemple, il n'était pas du tout clair a priori qu'une application qui préserve les distances et l'orientation est soit une translation (déplacement suivant un vecteur constant), soit une rotation (déplacement angulaire constant autour d'un point fixe). On aurait pu imaginer que d'autres transformations plus exotiques préservassent les distances.
- La figure ci-contre illustre l'action d'une similitude s de centre Ω , de rapport λ et d'angle de mesure θ sur un point M . On tourne et on dilate, ou bien on dilate et on tourne.



Démonstration

- (i) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$ et f la similitude directe $z \mapsto az + b$. Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur d'affixe b . Supposons donc désormais $a \neq 1$. Alors l'équation f possède un unique point fixe : l'équation $f(\omega) = \omega$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ possède une unique solution $\omega = \frac{b}{1-a}$. Notons Ω le point d'image ω . Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) - \omega = f(z) - f(\omega) = (az + b) - (a\omega + b) = a(z - \omega) = |a| \times \underbrace{\left(e^{i \arg(a)} (z - \omega) \right)}_{\substack{\text{Rotation de centre } \Omega \\ \text{et d'angle de mesure } \arg(a)}} = e^{i \arg(a)} \times \underbrace{\left(|a| (z - \omega) \right)}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \Omega \\ \text{et de rapport } |a| > 0}}.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{Homothétie de centre } \Omega \\ \text{et de rapport } |a| > 0}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{Rotation de centre } \Omega \\ \text{et d'angle de mesure } \arg(a)}}$$

Comme voulu, f apparaît comme la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

- (ii) Le cas des isométries directes se déduit du cas des similitudes directes : une similitude directe de rapport 1 est soit une translation, soit une rotation. ■

Exemple L'application $f : z \mapsto 2iz + 1$ est la similitude de centre $\frac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

En effet Comme le coefficient de z dans la forme de f est $2i \neq 1$, f n'est pas une translation. Son rapport est alors $|2i| = 2$ et son angle a pour mesure $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$.

Enfin le centre de f est son unique point fixe ω . Calculons son affixe : $f(\omega) = \omega \iff \omega = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$.