

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU PLAN

1 PRÉ-REQUIS

Conformément au programme, on suppose connus dans ce chapitre :

- les notions de *plan*, de *point* et de *distance* entre deux points ;
- la notion de *vecteur*, dont : norme, addition et multiplication par un réel, colinéarité, relation de Chasles ;
- la notion de *barycentre*, dont : associativité ;
- la notion d'*orthogonalité*, dont : théorème de Pythagore ;
- les notions d'*orientation* et d'*angle orienté de vecteurs*, dont : relation de Chasles, mesure.

Précisons tout de même rapidement quelques-uns de ces points.

Définition (Colinéarité) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

✖ ✖ ✖ **Attention !** La définition « il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ » qu'on a parfois en tête est incorrecte : le « ou » est nécessaire. Pourquoi ? Avec la définition sans « ou » dans le cas $\vec{u} = \vec{0}$, le seul vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$ est $\vec{0}$, alors qu'intuitivement tout vecteur est colinéaire au vecteur nul.

Définition (Point pondéré et barycentre d'une famille finie de points pondérés)

- On appelle *point pondéré* tout couple (A, λ) constitué d'un point A du plan et d'un réel λ .
- Soit $\left((A_k, \lambda_k)\right)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de points pondérés. On pose : $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ (appelé *poids total* de la famille).

1) Si $\Lambda = 0$, le vecteur $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k}$ ne dépend pas du choix du point M .

2) Si au contraire $\Lambda \neq 0$, il existe un unique point G du plan pour lequel $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$, appelé le *barycentre*

des points pondérés $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n)$. Dans ce cas, pour tout point M du plan : $\Lambda \overrightarrow{MG} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k}$.

✂ ✂ ✂ **Explication** Le barycentre G des points pondérés $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n)$, lorsqu'il existe, est une moyenne des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ affectés des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — comme quand on calcule une moyenne de notes avec des coefficients. Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$, on parle plutôt de *isobarycentre* des points $A_1, A_2, \dots, A_n$. Par ailleurs l'isobarycentre de deux points n'est autre que leur milieu.

2 MODES DE REPÉRAGE DANS LE PLAN

2.1 COORDONNÉES CARTÉSIENNES

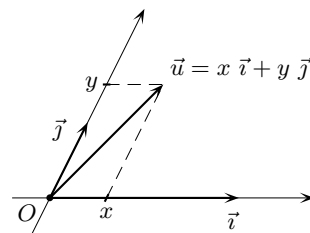
Définition (Base, repère cartésien)

- On appelle *base (du plan)* tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
- On appelle *repère (cartésien) (du plan)* tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

Nous admettrons le résultat suivant, point de départ de toute la géométrie analytique de ce chapitre.

Définition (Coordonnées cartésiennes) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un et un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$. On l'appelle le couple des *coordonnées (cartésiennes)* de $\vec{u}$.
- Soit M un point du plan. Les coordonnées (x, y) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelées les *coordonnées (cartésiennes)* de M , de sorte que : $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$.



🐞 🐞 🐞 **Explication** Intuitivement, la présence de **deux** coordonnées évoque le fait qu'un plan est un espace à **deux** dimensions, mais au fond nous ne savons pas très bien pour le moment ce que nous entendons par dimension.

🔧 🔧 🔧 **En pratique** L'unicité des coordonnées permet de faire des *identifications* très utiles. Par exemple, si on a une égalité du type : $x \vec{i} + y \vec{j} = x' \vec{i} + y' \vec{j}$, alors $x = x'$ et $y = y'$.

Théorème (Règles de calcul sur les coordonnées cartésiennes) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien.

(i) Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}'$ a pour coordonnées $(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y')$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(ii) Soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(iii) Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points de coordonnées respectives $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On pose $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et on suppose $\Lambda \neq 0$. Le barycentre des points pondérés $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \right)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Rappelons qu'un barycentre n'est jamais qu'une moyenne de points. L'assertion (iii) nous raconte donc ceci : que les coordonnées de la moyenne sont la moyenne des coordonnées. En particulier, si deux points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) , le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Démonstration

(i) et (ii) On lit les coordonnées de $\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}'$ et $\overrightarrow{AB}$ sur les deux calculs suivants :

$$\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}' = \lambda(x \vec{i} + y \vec{j}) + \lambda'(x' \vec{i} + y' \vec{j}) = (\lambda x + \lambda' x') \vec{i} + (\lambda y + \lambda' y') \vec{j}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B \vec{i} + y_B \vec{j}) - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}.$$

(iii) Notons G le barycentre étudié et (x, y) ses coordonnées. Exprimée sous forme de coordonnées, l'égalité vectorielle $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{AG} = \vec{0}$ fournit deux égalités : $\sum_{k=1}^n \lambda_k (x - x_k) = 0$ et $\sum_{k=1}^n \lambda_k (y - y_k) = 0$, et finalement

$$\text{comme voulu : } x = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k. \quad \blacksquare$$

Imaginez qu'on dispose de deux repères du plan. Si on connaît les coordonnées dans l'un des repères, peut-on les calculer facilement dans le second ? Ce problème important s'appelle sans originalité le problème du *changement de repère*. Etudiez sérieusement l'exemple qui suit. Il est impératif que vous puissiez le refaire seul et même vous adapter à toute situation semblable.

Exemple On part d'un certain repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note Ω le point de coordonnées $(1, 2)$ dans ce repère et $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(1, -1)$ et $(2, 1)$. Alors $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère du plan.

Dans ce qui suit, on notera par convention (x, y) les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) les coordonnées dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$. Alors si $\mathcal{E}$ désigne la courbe d'équation $y = x^2$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{E}$ a pour équation $X^2 + 4XY + 4Y^2 + 3X + 3Y = 1$ dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$.

En effet

- Il est « clair » que les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont non colinéaires, et donc que $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère du plan. Nous verrons un peu plus loin comment le montrer rapidement et élégamment en calculant un *déterminant*.
- **Idée de la preuve :** Nous connaissons l'équation de $\mathcal{E}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$; c'est $y = x^2$. Pour trouver l'équation de $\mathcal{E}$ dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$, nous avons besoin de connaître x et y en fonction de X et Y ; il nous suffira alors de remplacer x et y par X et Y dans l'équation $y = x^2$.
- Soit M un point du plan, de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$. Nous voulons exprimer x et y en fonction de X et Y . Or x et y sont liés par définition au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et X et Y au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.

$$\overrightarrow{OM} = \boxed{x \vec{i} + y \vec{j}}$$

$$= \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = (\vec{i} + 2\vec{j}) + (X \vec{I} + Y \vec{J}) = (\vec{i} + 2\vec{j}) + (X(\vec{i} - \vec{j}) + Y(2\vec{i} + \vec{j})) = \boxed{(1 + X + 2Y) \vec{i} + (2 - X + Y) \vec{j}}.$$

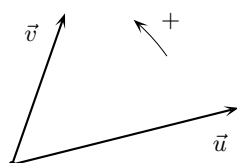
Il ne nous reste plus alors qu'à identifier les coordonnées selon $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans les deux expressions encadrées :

$$x = 1 + X + 2Y \quad \text{et} \quad y = 2 - X + Y.$$

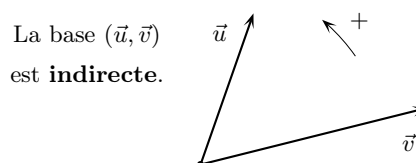
Dans ce calcul, nous sommes partis de « $\overrightarrow{OM} = \dots$ » car nous voulions x et y en fonction de X et Y ; si nous avions voulu l'inverse, nous serions partis plutôt de « $\overrightarrow{\Omega M} = \dots$ ».

- Qu'en est-il finalement de l'équation de $\mathcal{E}$ dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$? Tout simplement on remplace :
 $M \in \mathcal{E} \iff y = x^2 \iff 2 - X + Y = (1 + X + 2Y)^2 \iff X^2 + 4XY + 4Y^2 + 3X + 3Y = 1.$

Les figures suivantes rappellent quelle convention est adoptée classiquement en matière d'orientation du plan.



La base $(\vec{u}, \vec{v})$
est **directe**.



La base $(\vec{u}, \vec{v})$
est **indirecte**.

Définition (Base et repère orthonormaux/directs)

- Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan. On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est *directe* si l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ possède une mesure dans $]0, \pi[$, et *indirecte* sinon. On dit en outre que $(\vec{i}, \vec{j})$ est *orthonormale* si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
- Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan. On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est *direct* (resp. *orthonormal*) si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ l'est.

Dans la suite de ce chapitre :

ON FIXE UNE FOIS POUR TOUTES UN REPÈRE **ORTHONORMAL DIRECT** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ DU PLAN.

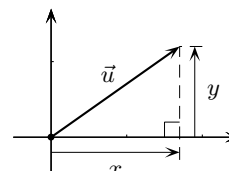
- Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous considérerons désormais que M et ses coordonnées (x, y) coïncident : $M = (x, y)$. En particulier : $O = (0, 0)$.
- De la même façon, soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous considérerons désormais que $\vec{u}$ et ses coordonnées (x, y) coïncident : $\vec{u} = (x, y)$. En particulier : $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.
- Enfin, soit M un point du plan. Posons $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Alors M et $\vec{u}$ ont les mêmes coordonnées. En vertu des deux points précédents, nous considérerons désormais que M et $\vec{u}$ coïncident : $M = \vec{u}$.

Notez bien que c'est parce que nous avons fixé un repère orthonormal direct de référence que les points, les vecteurs et les coordonnées peuvent nous paraître identiques. En résumé : grâce à $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le plan est identifié à l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Théorème (Distance, norme et coordonnées)

- Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . Alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x, y) . Alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Démonstration Simple application du théorème de Pythagore. ■

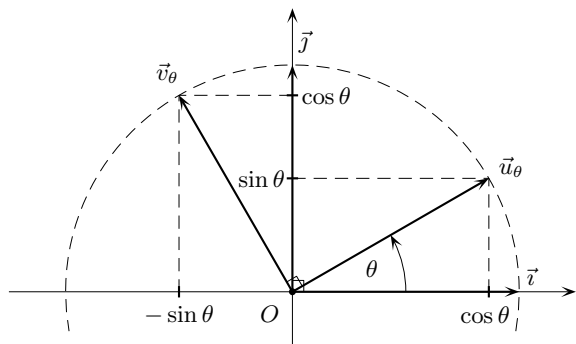


2.2 COORDONNÉES POLAIRES

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit deux vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$ définis par :

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$

Les formules duales suivantes sont également à connaître :

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{u}_\theta - \sin \theta \vec{v}_\theta \\ \vec{j} = \sin \theta \vec{u}_\theta + \cos \theta \vec{v}_\theta \end{cases}$$


VOUS DEVEZ SAVOIR RETROUVER CES FORMULES INSTANTANÉMENT.

Il est facile de vérifier que $\|\vec{u}_\theta\| = \|\vec{v}_\theta\| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$, autrement dit que $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$ sont unitaires. Ils sont aussi orthogonaux en vertu de la réciproque du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_\theta + \vec{v}_\theta\|^2 &= \|(\cos \theta - \sin \theta) \vec{i} + (\sin \theta + \cos \theta) \vec{j}\|^2 \\ &= (\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 2 = 1 + 1 = \|\vec{u}_\theta\|^2 + \|\vec{v}_\theta\|^2. \end{aligned}$$

ce qui montre que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base orthonormale. Observons de plus que cette base orthonormale est directe — nous le prouverons plus tard.

Définition (Coordonnées polaires) Soit M un point du plan.

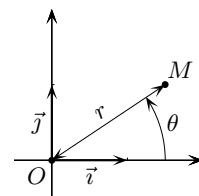
On appelle (couple de) coordonnées polaires de M (relativement au repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$) tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{OM} = r \vec{u}_\theta$.

- Les coordonnées polaires du point O sont tous les couples $(0, \theta)$, θ décrivant $\mathbb{R}$.
- Si $M \neq O$, il y a exactement deux couples possibles (r, θ) de coordonnées polaires de M où θ est défini à 2π près :

soit $r = OM$ et $\theta \equiv (\vec{i}, \vec{OM}) \pmod{2\pi}$, soit $r = -OM$ et $\theta \equiv (\vec{i}, \vec{OM}) + \pi \pmod{2\pi}$.

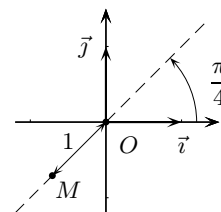
(figure ci-contre)

→ On préfère généralement travailler avec ce type de coordonnées polaires.



××× Attention !

- Autant les coordonnées cartésiennes étaient uniques, autant les coordonnées polaires ne le sont pas. C'est pourquoi on ne parlera jamais « du » couple de coordonnées polaires d'un point ; on parlera d'un couple de coordonnées polaires.
- Soyez prudents quand $r < 0$. Par exemple, on a représenté ci-contre le point M de coordonnées polaires $(-1, \frac{\pi}{4})$. On peut préférer le voir comme le point de coordonnées polaires $(1, \pi + \frac{\pi}{4})$.



Théorème (Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes) Soit M un point du plan de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ) . Alors : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Démonstration Simple identification des coordonnées de $\vec{OM}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sur la relation vectorielle suivante :

$$\vec{OM} = \boxed{x \vec{i} + y \vec{j}} = r \vec{u}_\theta = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = \boxed{r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}}. \quad \blacksquare$$

On peut également passer des coordonnées cartésiennes d'un point à ses coordonnées polaires, mais nous n'avons pas pour le moment les moyens de rendre cela très explicite. Tout de même, supposons qu'un point M du plan nous soit donné avec ses coordonnées cartésiennes (x, y) et notons (r, θ) un couple de coordonnées polaires de M . Alors $r = \pm OM = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$. Le réel r est donc facile à calculer, mais pour $M \neq O$, l'angle θ l'est moins. Nous savons que $\cos \theta = \frac{x}{r}$ et que $\sin \theta = \frac{y}{r}$, mais θ lui-même nous échappe. Nous introduirons prochainement des fonctions adaptées à ce problème : arcsinus, arccosinus et arctangente.

3 PRODUIT SCALAIRE

Définition (Produit scalaire) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle *produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$* , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right).$$

En particulier : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (*symétrie*).

Egalement : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Drôle de définition, me direz-vous. Pourquoi pas plutôt « $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ » ? Réponse : parce que l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, ce qui nous obligerait à distinguer inélégamment ces cas. Quoi qu'il en soit, la définition retenue n'est pas si surprenante que cela, car si on admet qu'on connaît déjà le produit scalaire et ses propriétés :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Cette identité remarquable généralise le théorème de Pythagore, obtenu lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, i.e. pour $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Théorème (Produit scalaire et orthogonalité) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Démonstration D'après la réciproque du théorème de Pythagore :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.} \quad \blacksquare$$

Théorème (Produit scalaire et coordonnées dans une base orthonormale directe)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') : $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy'$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** L'hypothèse que la base est directe est en fait inutile, mais par souci d'uniformité et parce que nous reverrons tout cela dans un contexte plus satisfaisant en fin d'année, nous ne travaillons dans ce chapitre qu'avec des bases orthonormales directes. L'hypothèse que la base est orthonormale est en revanche absolument indispensable.

Démonstration Le vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{u}'\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}'\|^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left((x + x')^2 + (y + y')^2 \right) - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) \right] = xx' + yy'. \quad \blacksquare$$

Théorème (Bilinéarité du produit scalaire) Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{u}'$ et $\vec{v}$ du plan et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Linéarité à gauche :} & (\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}') \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda' \vec{u}' \cdot \vec{v} \\ \text{Linéarité à droite :} & \vec{v} \cdot (\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}') = \lambda \vec{v} \cdot \vec{u} + \lambda' \vec{v} \cdot \vec{u}'. \end{cases}$$

Démonstration Montrons seulement la linéarité à gauche, la linéarité à droite s'en déduisant par symétrie. Notons (x, y) , (x', y') et (x'', y'') les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}$.

$$(\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}') \cdot \vec{v} = (\lambda x + \lambda' x')x'' + (\lambda y + \lambda' y')y'' = \lambda(xx'' + yy'') + \lambda'(x'x'' + y'y'') = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda' \vec{u}' \cdot \vec{v}. \quad \blacksquare$$

Théorème (Expression « cosinus » du produit scalaire)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non nuls** du plan : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

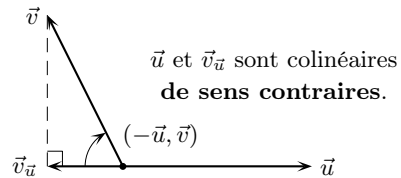
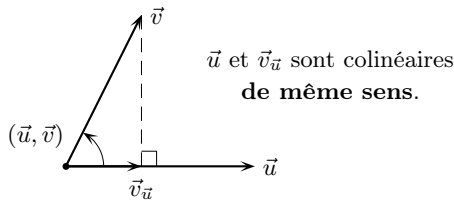
🐞 🐞 🐞 **Explication** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont supposés non nuls pour que l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ soit bien défini.

Démonstration Partons des égalités : $\vec{u} = \|\vec{u}\|(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$ et $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j})$, où $\theta \equiv (\vec{i}, \vec{u}) \bmod 2\pi$ et $\varphi \equiv (\vec{i}, \vec{v}) \bmod 2\pi$. Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc respectivement $(\|\vec{u}\| \cos \theta, \|\vec{u}\| \sin \theta)$ et $(\|\vec{v}\| \cos \varphi, \|\vec{v}\| \sin \varphi)$, donc comme voulu :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cos \theta \times \|\vec{v}\| \cos \varphi + \|\vec{u}\| \sin \theta \times \|\vec{v}\| \sin \varphi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\theta - \varphi) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}). \quad \blacksquare$$

Théorème (Interprétation du produit scalaire en termes de projection) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et notons $\vec{v}_{\vec{u}}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ selon $\vec{u}$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_{\vec{u}}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}_{\vec{u}} \text{ sont colinéaires de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_{\vec{u}}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v}_{\vec{u}} \text{ sont colinéaires de sens contraires.} \end{cases}$



Démonstration Nous pouvons supposer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sans quoi il n'y a rien à prouver.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}_{\vec{u}}$ sont colinéaires de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_{\vec{u}}\|$
- Si au contraire $\vec{u}$ et $\vec{v}_{\vec{u}}$ sont colinéaires de sens contraires :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos[(\vec{u}, -\vec{u}) + (-\vec{u}, \vec{v})] = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos[\pi + (-\vec{u}, \vec{v})] \\ &= -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(-\vec{u}, \vec{v}) = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_{\vec{u}}\|. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

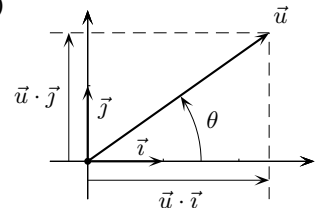
Théorème (Produit scalaire et coordonnées dans une base orthonormale directe)

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On note θ une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$. Alors :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j} = \|\vec{u}\| \cos \theta \vec{i} + \|\vec{u}\| \sin \theta \vec{j}.$$

En d'autres termes, les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$(\vec{u} \cdot \vec{i}, \vec{u} \cdot \vec{j}) = (\|\vec{u}\| \cos \theta, \|\vec{u}\| \sin \theta).$$



🐇 🐇 🐇 Explication

- Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ selon $\vec{i}$ est le vecteur $(\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} = \|\vec{u}\| \cos \theta \vec{i}$, et le projeté orthogonal de $\vec{u}$ selon $\vec{j}$ est le vecteur $(\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j} = \|\vec{u}\| \sin \theta \vec{j}$.
- L'égalité « $\vec{u} = \|\vec{u}\| \cos \theta \vec{i} + \|\vec{u}\| \sin \theta \vec{j}$ » s'écrit aussi « $\vec{u} = \|\vec{u}\| \vec{u}_{\theta}$ ». Elle ne fait qu'exprimer de nouveau la grande idée des coordonnées polaires, bien qu'ici $\vec{u}$ soit un vecteur et non un point.

Démonstration Notons (x, y) les coordonnées de $\vec{u}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$, de sorte que $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot \vec{i} = x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + y (\vec{j} \cdot \vec{i}) = x \times 1 + y \times 0 = x, \quad \text{et de même : } \vec{u} \cdot \vec{j} = y. \quad \blacksquare$$

Théorème (Identités remarquables sur le produit scalaire) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{et} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

Démonstration La première identité est notre définition du produit scalaire. Pour la dernière, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u}) - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{u})}_{=0} - (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2. \quad \blacksquare$

4 DÉTERMINANT

Définition (Déterminant) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on appelle *déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$* , noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$, le réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*** **Attention !** Les cas $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$ sont traités séparément car dans ces cas l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas défini.

Théorème (Déterminant, colinéarité et alignement)

- **Colinéarité :** Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- **Alignement :** Pour tous points A, B et C du plan : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \iff A, B$ et C sont alignés.

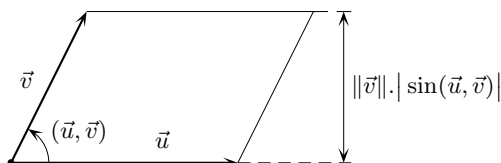
Démonstration Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le résultat est évident, car tout vecteur est colinéaire au vecteur nul. Supposons donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, de sorte que $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Le résultat sur l'alignement découle immédiatement de celui sur la colinéarité. ■

Théorème (Valeur absolue du déterminant et aire d'un parallélogramme) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ est l'aire de tout parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration Nous pouvons supposer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Dans la relation : $|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$,



$\|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ est égal à la **hauteur** du parallélogramme étudié, si on considère l'une des arêtes dirigées par $\vec{u}$ comme sa **base**. Pour conclure, il faut se souvenir que l'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur. ■

Théorème (Signe du déterminant et orientation) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) > 0 \iff (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base directe du plan.}$$

Démonstration Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, nous n'avons rien à démontrer car les deux propositions en jeu sont fausses, donc équivalentes. Supposons donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Nous venons déjà de voir que $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan. Tout repose ensuite sur la remarque suivante : si x est un réel, $\sin x > 0$ si et seulement si $x \in]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z}$. Or un angle de mesure comprise entre 0 et π est le signe d'une orientation directe.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) > 0 \iff \sin(\vec{u}, \vec{v}) > 0 \iff (\vec{u}, \vec{v}) \in]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z} \iff (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est directe.} \quad \blacksquare$$

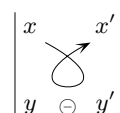
Théorème (Déterminant et coordonnées dans une base orthonormale directe)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') : $\det(\vec{u}, \vec{u}') = xy' - yx'$.

 **En pratique**

Si les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont respectivement (x, y) et (x', y') , le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{u}')$ se note

souvent $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$. La formule $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ se retient alors au moyen du petit dessin suivant :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$


Démonstration On peut supposer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sans quoi le résultat est évident. Partons des égalités : $\vec{u} = \|\vec{u}\| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \|\vec{v}\| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$, où $\theta \equiv (\vec{i}, \vec{u}) \bmod 2\pi$ et $\varphi \equiv (\vec{i}, \vec{v}) \bmod 2\pi$. Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement $(x, y) = (\|\vec{u}\| \cos \theta, \|\vec{u}\| \sin \theta)$ et $(x', y') = (\|\vec{v}\| \cos \varphi, \|\vec{v}\| \sin \varphi)$, donc : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\varphi - \theta) = \|\vec{u}\| \cos \theta \times \|\vec{v}\| \sin \varphi - \|\vec{u}\| \sin \theta \times \|\vec{v}\| \cos \varphi = xy' - yx'$. ■

Exemple Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base directe du plan.

En effet $\det(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 > 0$.

Théorème (Antisymétrie et bilinéarité du déterminant) Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{u}'$ et $\vec{v}$ du plan et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$:

- (i) **Antisymétrie** : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$.
- (ii) **Bilinéarité** :
- $$\begin{cases} \text{Linéarité à gauche :} & \det((\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}'), \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \lambda' \det(\vec{u}', \vec{v}) \\ \text{Linéarité à droite :} & \det(\vec{v}, (\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}')) = \lambda \det(\vec{v}, \vec{u}) + \lambda' \det(\vec{v}, \vec{u}'). \end{cases}$$

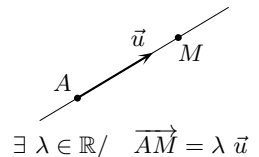
Démonstration L'assertion (i) repose sur la définition du déterminant et l'imparité du sinus. L'assertion (ii) se démontre comme son analogue pour le produit scalaire. ■

5 DROITES ET CERCLES

5.1 DROITES

Définition (Droite, définition par un point et un vecteur directeur) Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur **non nul**. On appelle *droite passant par A dirigée par $\vec{u}$* l'ensemble des points M du plan pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$.

Cette définition équivaut bien sûr à la suivante : la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan pour lesquels $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, i.e. pour lesquels $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$.



Théorème (Représentation paramétrique d'une droite définie par un point et un vecteur directeur) Soient $\mathcal{D}$ une droite, A un point de $\mathcal{D}$ de coordonnées (x_A, y_A) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ de coordonnées (a, b) .

Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) :

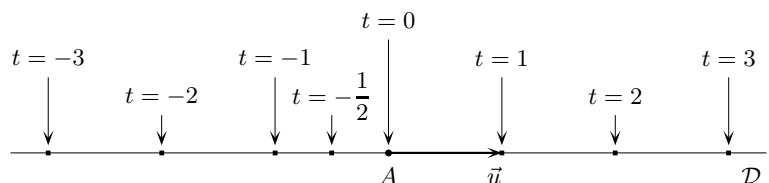
$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}.$$

Démonstration Pour tout point M de coordonnées (x, y) :

$$M \in \mathcal{D} \iff \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \xLeftrightarrow{\vec{u} \neq \vec{0}} \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t \vec{u} \iff \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}. \quad \blacksquare$$

🐞 🐞 🐞 Explication

Paramétrer une courbe, c'est associer à chacun de ses points un *paramètre* — un réel — de sorte que deux points distincts aient toujours des paramètres distincts. On obtient tous les points de la courbe en faisant varier le paramètre.



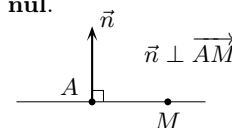
Théorème (Autres définitions possibles d'une droite)

• **Définition par deux points distincts** : Soient A et B deux points **distincts**. On appelle *droite passant par A et B* la droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

Toute droite peut être décrite ainsi par deux de ses points distincts quelconques.

• **Définition par un point et un vecteur normal** : Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur **non nul**.

L'ensemble des points M du plan pour lesquels $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux, i.e. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, est une droite appelée la *droite passant par A orthogonale à $\vec{n}$* .



Toute droite peut être décrite ainsi par un point et un vecteur normal.

• **Définition par une équation cartésienne** : Toute droite possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, et réciproquement, toute équation cartésienne de cette forme décrit une droite.

De plus, avec ces notations, la droite est dirigée par $(-b, a)$ et admet (a, b) pour vecteur normal.

Démonstration La preuve de ce théorème est donnée grosso modo dans la remarque pratique qui suit. ■

En pratique Comment détermine-t-on l'équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, ou par deux points distincts, ou par un point et un vecteur normal? Les techniques présentées ci-dessous constituent le minimum de ce que vous devez savoir faire. Sur vos copies, vous soignerez particulièrement l'usage des équivalences $\iff$.

• **Définition par un point et un vecteur directeur** : Soient A un point de coordonnées (x_A, y_A) , $\vec{u}$ un vecteur **non nul** de coordonnées notées $(-b, a)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$. Pour tout point M de coordonnées (x, y) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} &\iff \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} -b & x - x_A \\ a & y - y_A \end{vmatrix} = 0 &\iff -b(y - y_A) - a(x - x_A) = 0 \\ &\iff ax + by + c = 0 &\text{ si l'on pose } c = -ax_A - by_A. \end{aligned}$$

On comprend ici mieux la raison pour laquelle l'équation $ax + by + c = 0$ est le signe d'un vecteur **directeur** $(-b, a)$.

• **Définition par deux points distincts** : Si une droite $\mathcal{D}$ est définie par la donnée de deux points A et B **distincts**, alors $\mathcal{D}$ est aussi la droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{AB}$. On est ainsi ramené au cas précédent. Pour tout point M :

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0 \iff \dots$$

• **Définition par un point et un vecteur normal** : Soient A un point de coordonnées (x_A, y_A) , $\vec{n}$ un vecteur **non nul** de coordonnées (a, b) et $\mathcal{D}$ la droite passant par A orthogonale à $\vec{n}$. Pour tout point M de coordonnées (x, y) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont orthogonaux} &\iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 &\iff ax + by + c = 0 \quad \text{ si l'on pose } c = -ax_A - by_A. \end{aligned}$$

On comprend ici mieux la raison pour laquelle l'équation $ax + by + c = 0$ est le signe d'un vecteur **normal** (a, b) : le fait est simplement qu'on calcule un **produit scalaire** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \dots \\ y - \dots \end{pmatrix} = ax + by + \dots$. A bien retenir si vous voulez éviter de confondre « vecteur directeur $(-b, a)$ » et « vecteur normal (a, b) » !

Explication Et les équations de droite de la forme $y = mx + p$, elles sont où dans tout ça ? Vous êtes habitués souvent à l'idée que les droites ont dans le plan toute une équation de cette forme, **MAIS C'EST FAUX !** C'est oublier les équations de droite de la forme $x = m$. Ce qu'il faut retenir, c'est que la **forme générale** des droites dans le plan est celle que nous avons vue plus haut : $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

• **Cas où $b = 0$** : Alors $a \neq 0$ car $(a, b) \neq (0, 0)$. L'équation s'écrit donc ici $ax + c = 0$, qu'on peut réécrire $x = m$ si l'on pose $m = -\frac{c}{a}$. Une telle équation décrit une droite verticale dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

• **Cas où $b \neq 0$** : On peut ici diviser l'équation par b , qui devient donc $y = mx + p$ si l'on pose $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$. Nous sommes en présence ici du graphe de la fonction affine $x \mapsto mx + p$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

En pratique En géométrie, on a rarement l'occasion de manipuler les équations de droite de la forme $y = mx + p$, mais en analyse ou en physique, c'est au contraire plutôt ces équations qu'on cherche car elles équivalent à la donnée d'une fonction $x \mapsto mx + p$. Quelques petits rappels s'imposent.

- Pour commencer, rappelons que m est appelé le *coefficient directeur* de la droite. Si on réécrit l'équation de la droite sous la forme $mx - y + p = 0$, on observe que le vecteur $(1, m)$ en est un vecteur directeur. Il y a donc un rapport clair entre vecteur directeur et coefficient directeur.

Interprétation : si on part d'un point de la droite et qu'on avance d'une unité en abscisse et de m unité(s) en ordonnée, alors on arrive sur un point qui appartient toujours à la droite — puisqu'on s'est traduit d'un vecteur $(1, m)$. Plus généralement, ce principe s'applique si on avance de deux unités en abscisse et de $2m$ unité(s) en ordonnée ; ou de -1 unité en abscisse et de $-m$ unité(s) en ordonnée ; etc.

- Vous savez aussi que p est appelé l'*ordonnée à l'origine* et représente exactement ce que son nom indique. Mais comment trouver m et p si on connaît deux points quelconques de la droite, disons A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) ? La droite passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$, donc après un petit calcul de déterminant on trouve :

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A$$

et donc en particulier :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Formules vitales !

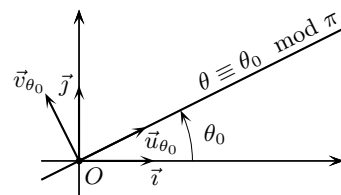
Petite remarque : pour $x = x_A$, on trouve bien $y = y_A$; et pour $x = x_B$, $y = y_B$.

- Cas particulier important : on cherche l'expression de la fonction affine de coefficient directeur m qui s'annule en un certain point x_0 . La formule précédente montre alors que la fonction cherchée est $x \mapsto m(x - x_0)$, et c'est de toute façon évident : bien sûr que $x - x_0$ s'annule pour $x = x_0$, et bien sûr aussi que le coefficient directeur vaut m !

Théorème (Equation polaire d'une droite)

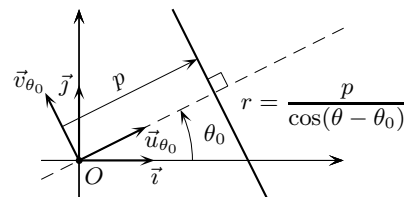
(i) Droites passant par O :

Toute droite passant par O possède une équation polaire de la forme $\theta \equiv \theta_0 \pmod{\pi}$ où $\theta_0 \in \mathbb{R}$, et réciproquement, toute équation polaire de cette forme décrit une droite passant par O .



(ii) Droites ne passant pas par O :

Toute droite ne passant pas par O possède une équation polaire de la forme $r = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}$ où $p \in \mathbb{R}^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, et réciproquement, toute équation polaire de cette forme décrit une droite ne passant pas par O .



Démonstration

- (i) **Droites passant par O :** Soit θ_0 un réel. Notons $\mathcal{D}$ la droite passant par O dirigée par $\vec{u}_{\theta_0}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des points du plan décrit par l'équation polaire $\theta \equiv \theta_0 \pmod{\pi}$. Pour tout point $M \neq O$ dont (r, θ) est un couple de coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \vec{u}_{\theta_0} \text{ et } \overrightarrow{OM} \text{ sont colinéaires} &\iff \vec{u}_{\theta_0} \text{ et } \vec{u}_{\theta} \text{ sont colinéaires} \\ &(\text{par définition de } M, \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_{\theta}, \text{ et par ailleurs } r \neq 0) \\ &\iff \det(\vec{u}_{\theta}, \vec{u}_{\theta_0}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} \cos \theta & \cos \theta_0 \\ \sin \theta & \sin \theta_0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \sin(\theta - \theta_0) = 0 &\iff \theta \equiv \theta_0 \pmod{\pi} &\iff M \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{D} = \mathcal{A}$. Nous avons bien montré comme voulu que la donnée d'une droite passant par O équivaut à la donnée d'une équation polaire $\theta \equiv \theta_0 \pmod{\pi}$.

- (ii) **Droites ne passant pas par O :** Cf. grosso modo la remarque pratique qui suit. ■

  **En pratique** Si l'on connaît l'équation cartésienne d'une droite ne passant pas par O , comment trouver son équation polaire ? Et dans l'autre sens ? Idée simple et fondamentale : utiliser les relations $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

- Soit $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par O décrite par une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors $c \neq 0$, puisque $O \notin \mathcal{D}$. Rappelons par ailleurs qu'il existe un réel θ_0 tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \theta_0)$.

Alors pour tout point M de coordonnées cartésiennes (x, y) , et dont un couple de coordonnées polaires est (r, θ) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff ax + by + c = 0 &\xleftrightarrow[x=r \sin \theta]{x=r \cos \theta} & ar \cos \theta + br \sin \theta + c = 0 &\iff r = \frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta} \\ &\iff r = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \theta_0)} &\iff r = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)} &\text{ si l'on pose } p = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

- Réciproquement, soient $p \in \mathbb{R}^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{A}$ l'ensemble de points du plan d'équation polaire $r = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}$. Alors pour tout point M de coordonnées cartésiennes (x, y) , et dont un couple de coordonnées polaires est (r, θ) :

$$M \in \mathcal{A} \iff r = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)} \iff p = r \cos(\theta - \theta_0) \iff r \cos \theta \cos \theta_0 + r \sin \theta \sin \theta_0 - p = 0$$

$$\iff \begin{matrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{matrix} \iff x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 - p = 0 \iff ax + by + c = 0 \quad \text{si l'on pose } a = \cos \theta_0, b = \sin \theta_0 \text{ et } c = -p \neq 0.$$

Ceci montre bien que $\mathcal{A}$ est une droite, laquelle ne passe pas par O puisque $c = -p \neq 0$.

Théorème (Distance d'un point à une droite) Soient M un point du plan de coordonnées (x_M, y_M) et $\mathcal{D}$ une droite. La distance de M à $\mathcal{D}$ est notée $d(M, \mathcal{D})$.

- (i) **Droite définie par un point et un vecteur directeur :** Soient A un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})|}{\|\vec{u}\|}.$$

- (ii) **Droite définie par une équation cartésienne :** Soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

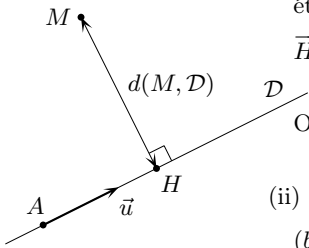
$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration

- (i) Notons H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors : $d(M, \mathcal{D}) = HM$. Par ailleurs, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant colinéaires : $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \det(\vec{u}, \overrightarrow{AH}) + \det(\vec{u}, \overrightarrow{HM}) = \det(\vec{u}, \overrightarrow{HM})$. Egalement, comme $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux : $|\det(\vec{u}, \overrightarrow{HM})| = \|\vec{u}\| \cdot \|\overrightarrow{HM}\| \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \|\vec{u}\| \cdot HM$.

On regroupe tout ça et finalement : $d(M, \mathcal{D}) = HM = \frac{|\det(\vec{u}, \overrightarrow{HM})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})|}{\|\vec{u}\|}.$

- (ii) Conséquence de (i). Si $A = (x_A, y_A)$ est un point de $\mathcal{D}$ et si $\vec{u}$ est le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(b, -a)$, alors : $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} b & x_M - x_A \\ -a & y_M - y_A \end{vmatrix} = ax_M + by_M - (ax_A + by_A) = ax_M + by_M + c.$ ■



5.2 CERCLES

Définition (Cercle) Soient A un point et $R \in \mathbb{R}_+$. On appelle *cercle de centre A et de rayon R* l'ensemble des points M du plan pour lesquels $AM = R$.

Théorème (Equation cartésienne d'un cercle)

- Soient A un point de coordonnées (x_A, y_A) et $R \in \mathbb{R}_+$. Le cercle de centre A et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2.$$

- Tout cercle possède une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $a^2 + b^2 - c \geq 0$, et réciproquement, toute équation cartésienne de cette forme décrit un cercle.

Démonstration

- Soient A un point de coordonnées (x_A, y_A) et $R \in \mathbb{R}_+$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon R . Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) :

$$M \in \mathcal{C} \iff AM = R \iff AM^2 = R^2 \iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2.$$

Ainsi $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Elle s'écrit aussi $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ si on pose $a = x_A$, $b = y_A$ et $c = x_A^2 + y_A^2 - R^2$. On a bien : $a^2 + b^2 - c = R^2 \geq 0$.

- Réciproquement, notons $\mathcal{A}$ l'ensemble de points du plan d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $a^2 + b^2 - c \geq 0$. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) :

$$M \in \mathcal{A} \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Identité remarquable!

Si donc nous notons A le point de coordonnées (a, b) et posons $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, alors :

$$M \in \mathcal{A} \iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \iff AM = R.$$

Conclusion : $\mathcal{A}$ est le cercle de centre A et de rayon R . ■

Théorème (Représentation paramétrique trigonométrique d'un cercle) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon $R > 0$. On note (x_A, y_A) les coordonnées de A .

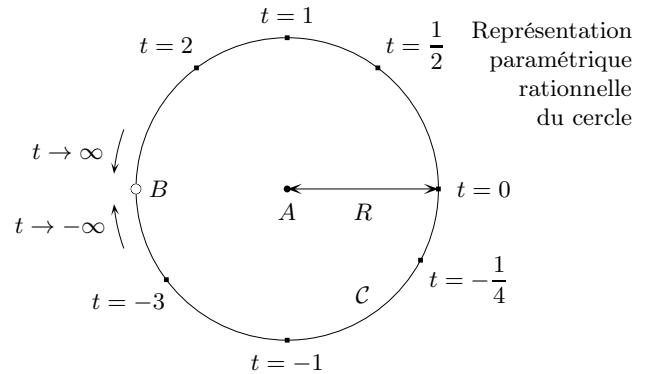
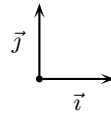
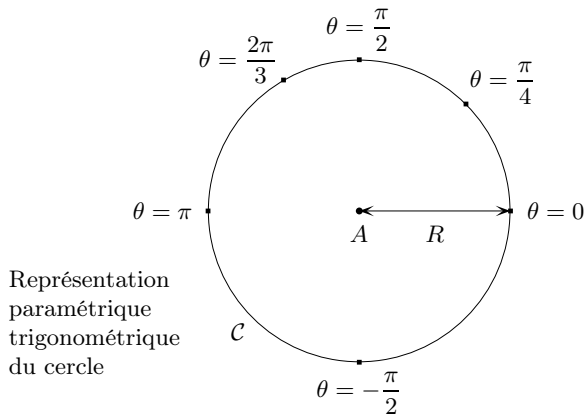
Pour tout point M de coordonnées (x, y) :

$$M \in \mathcal{C} \iff \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_A + R \cos \theta \\ y = y_A + R \sin \theta. \end{cases}$$

Démonstration Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 &\iff \left(\frac{x - x_A}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - y_A}{R}\right)^2 = 1 \\ &\iff \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \frac{x - x_A}{R} = \cos \theta \\ \frac{y - y_A}{R} = \sin \theta \end{cases} &\iff \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_A + R \cos \theta \\ y = y_A + R \sin \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

■



Théorème (Equation polaire d'un cercle passant par O) Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par O , de centre A et de rayon R . Soit (R, θ_0) un couple de coordonnées polaires de A . Alors $\mathcal{C}$ est décrit par l'équation polaire :

$$r = 2R \cos(\theta - \theta_0).$$

Démonstration Notons (x_A, y_A) les coordonnées de A , telles que $x_A = R \cos \theta_0$ et $y_A = R \sin \theta_0$. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$, qu'on peut réécrire sous la forme $x^2 + y^2 - 2x_A x - 2y_A y = 0$. Alors pour tout point M de coordonnées cartésiennes (x, y) , et dont un couple de coordonnées polaires est (r, θ) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff x^2 + y^2 - 2x_A x - 2y_A y = 0 &\iff r^2 - 2rR(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0) = 0 \\ &\iff r(r - 2R \cos(\theta - \theta_0)) = 0 &\iff r = 0 \text{ ou } r = 2R \cos(\theta - \theta_0). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{C}$ est décrit par l'équation $r = 2R \cos(\theta - \theta_0)$ — on peut oublier l'équation $r = 0$ car le point O qu'elle décrit est déjà décrit par l'équation $r = 2R \cos(\theta - \theta_0)$ pour $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$. ■

Théorème (Intersection d'un cercle et d'une droite) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon $R > 0$ et $\mathcal{D}$ une droite.

- Si $d(A, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont exactement deux points d'intersection distincts.
- Si $d(A, \mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un unique point d'intersection H égal au projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ est dite *tangente* à $\mathcal{C}$ en H .
- Si $d(A, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Démonstration Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont les points de $\mathcal{D}$ dont la distance à A est égale à R . Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Le théorème de Pythagore affirme que pour tout point M de $\mathcal{D}$: $AM^2 = AH^2 + HM^2$. On a par ailleurs : $AH = d(A, \mathcal{D})$. Du coup, pour tout point M de $\mathcal{D}$:

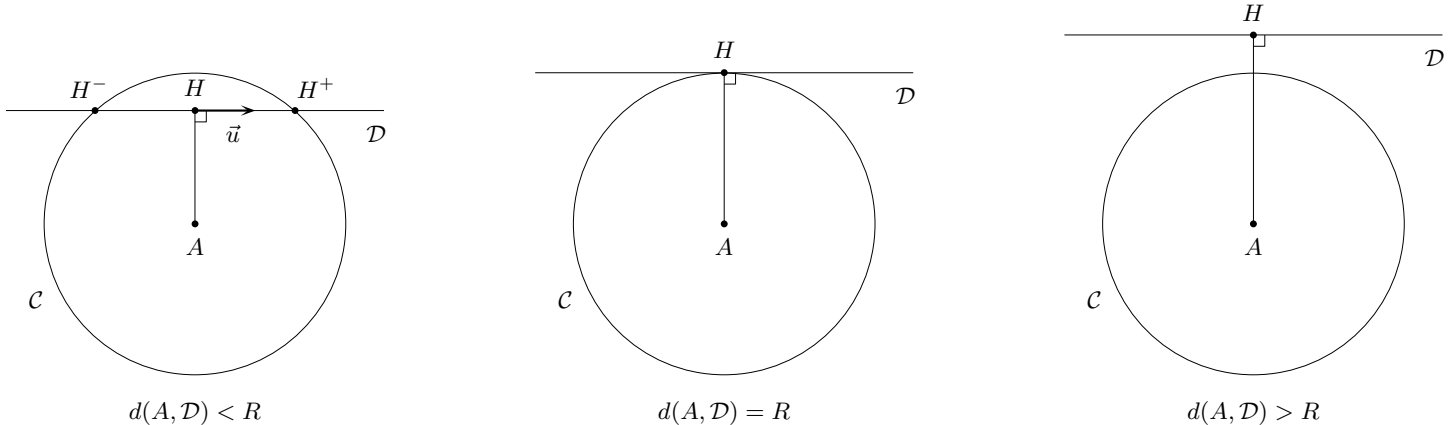
$$M \in \mathcal{C} \iff AM = R \iff AM^2 = R^2 \iff AH^2 + HM^2 = R^2 \iff HM^2 = R^2 - d(A, \mathcal{D})^2.$$

- Si $d(A, \mathcal{D}) < R$, donnons-nous $\vec{u}$ un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}$. Alors pour tout point M de $\mathcal{D}$, si on note λ le réel tel que $\overrightarrow{HM} = \lambda \vec{u}$:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff HM = \sqrt{R^2 - d(A, \mathcal{D})^2} &\iff \|\overrightarrow{HM}\| = \sqrt{R^2 - d(A, \mathcal{D})^2} \\ &\iff |\lambda| = \sqrt{R^2 - d(A, \mathcal{D})^2} &\iff \lambda = \pm \sqrt{R^2 - d(A, \mathcal{D})^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $H^- = H - \sqrt{R^2 - d(A, \mathcal{D})^2} \vec{u}$ et $H^+ = H + \sqrt{R^2 - d(A, \mathcal{D})^2} \vec{u}$, alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{H^-, H^+\}$ est constitué de deux points **distincts** — distincts car $d(A, \mathcal{D}) < R$.

- Si $d(A, \mathcal{D}) = R$, alors pour tout point M de $\mathcal{D}$: $M \in \mathcal{C} \iff HM = 0 \iff M = H$. Ceci montre bien que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{H\}$.
- Si $d(A, \mathcal{D}) > R$, alors $R^2 - d(A, \mathcal{D})^2 < 0$, et donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$. ■



Théorème (Intersection de deux cercles) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques — i.e. de centres distincts — de centres respectifs A et A' et de rayons respectifs R et R' .

- Alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ possèdent 0, 1 ou 2 points d'intersection distincts.
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ possèdent au moins un point d'intersection si et seulement si : $|R' - R| \leq AA' \leq R + R'$.

Démonstration

- Notons (x_A, y_A) et $(x_{A'}, y_{A'})$ les coordonnées respectives de A et A' . Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ n'étant pas concentriques, $(x_A, y_A) \neq (x_{A'}, y_{A'})$. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) :

$$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \iff \begin{cases} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \\ (x - x_{A'})^2 + (y - y_{A'})^2 = R'^2 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \\ 2(x_A - x_{A'})x + 2(y_A - y_{A'})y + k = 0, \end{cases}$$

où $k = x_{A'}^2 + y_{A'}^2 - x_A^2 - y_A^2 + R^2 - R'^2$. La seconde équation du système ainsi obtenu est l'équation d'une droite car $(x_A - x_{A'}, y_A - y_{A'}) \neq (0, 0)$. Du coup, si nous notons $\mathcal{D}$ cette droite, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est l'intersection d'un cercle et d'une droite, et donc contient 0, 1 ou 2 points distincts en vertu du théorème précédent.

- Comme nous l'avons vu, l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est non vide si et seulement si $d(A, \mathcal{D}) \leq R$. Or :

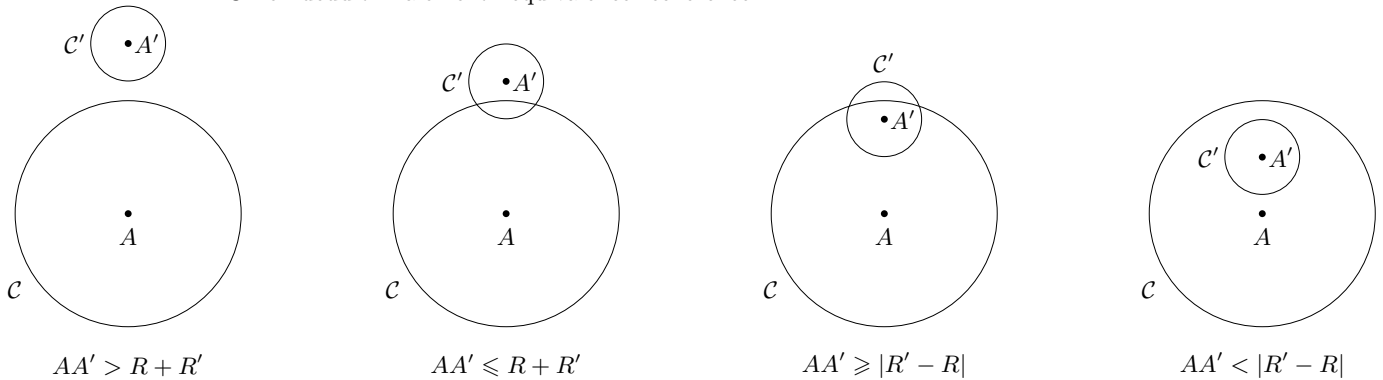
$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{\overbrace{|2(x_A - x_{A'})x_A + 2(y_A - y_{A'})y_A + k|}^{\text{Equation de } \mathcal{D} \text{ au point } A}}{\sqrt{4(x_A - x_{A'})^2 + 4(y_A - y_{A'})^2}} = \frac{|(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2 + (R^2 - R'^2)|}{2\sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2}} = \frac{|AA'^2 + R^2 - R'^2|}{2AA'}.$$

Ainsi :	$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est non vide	$\iff$	$\frac{ AA'^2 + R^2 - R'^2 }{2AA'} \leq R$
		$\iff$	$ AA'^2 + R^2 - R'^2 \leq 2R.AA'$
		$\iff$	$-2R.AA' \leq AA'^2 + R^2 - R'^2 \leq 2R.AA'$
		$\iff$	$(AA' - R)^2 \leq R'^2 \text{ et } (AA' + R)^2 \geq R'^2$
		$\iff$	$ AA' - R \leq R' \text{ et } AA' + R \geq R'$
		$\iff$	$-R' \leq AA' - R \leq R' \text{ et } -AA' - R \leq R' \leq AA' + R$
		$\iff$	$AA' \leq R + R' \text{ et } AA' \geq R' - R \text{ et } AA' \geq R - R'.$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

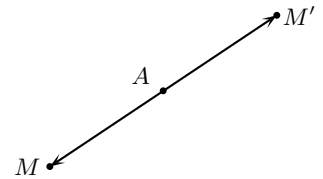
On en déduit finalement l'équivalence recherchée. ■



6 PROJECTIONS ET SYMÉTRIES

Définition (Symétrie centrale) Soit A un point.

On appelle *symétrie (centrale) par rapport à A* l'application qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' défini par : $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$, de sorte que A soit le milieu du segment $[MM']$. Le point M' est alors appelé le *symétrique de M par rapport à A* .



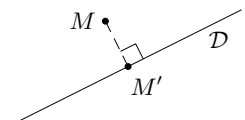
Exemple Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(3, -4)$. Le symétrique de B par rapport à A est le point C de coordonnées $(-1, 8)$.

En effet Simple calcul de x_C et y_C à partir des relations $x_A = \frac{x_B + x_C}{2}$ et $y_A = \frac{y_B + y_C}{2}$.

Définition (Projection orthogonale sur une droite) Soit $\mathcal{D}$ une droite. On appelle *projection (orthogonale) sur $\mathcal{D}$* l'application qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' défini par :

- $M' \in \mathcal{D}$;
- $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$.

Le point M' est alors appelé le *projeté (orthogonal) de M sur $\mathcal{D}$* .

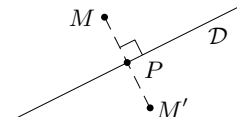


Exemple Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + 2y - 1 = 0$ et A le point de coordonnées $(1, 1)$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ est le point P de coordonnées $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

En effet La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2, 1)$. Le projeté P de A sur $\mathcal{D}$ est donc défini par les deux relations suivantes : $P \in \mathcal{D}$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, i.e. $x_P + 2y_P - 1 = 0$ et $-2x_P + y_P + 1 = 0$. Le système de ces deux équations se résout facilement : $x_P = \frac{3}{5}$ et $y_P = \frac{1}{5}$.

Définition (Symétrie orthogonale par rapport à une droite) Soit $\mathcal{D}$ une droite.

On appelle *symétrie (orthogonale) par rapport à $\mathcal{D}$* l'application qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' pour lequel, si P désigne le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, P est le milieu de $[MM']$. Le point M' est appelé le *symétrique (orthogonal) de M par rapport à $\mathcal{D}$* .



Exemple On reprend la droite $\mathcal{D}$ et le point A de l'exemple précédent. Le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$ est le point S de coordonnées $\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

En effet Comme $\frac{3}{5} = x_P = \frac{x_A + x_S}{2} = \frac{1 + x_S}{2}$ et $\frac{1}{5} = y_P = \frac{y_A + y_S}{2} = \frac{1 + y_S}{2}$, alors $x_S = \frac{1}{5}$ et $y_S = -\frac{3}{5}$.

7 QUELQUES RUDIMENTS SUR LES ANGLES

7.1 THÉORÈME DE L'ANGLE AU CENTRE

Théorème (Théorème de l'angle au centre) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et A et B deux points de $\mathcal{C}$. Pour tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et B :

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}.$$

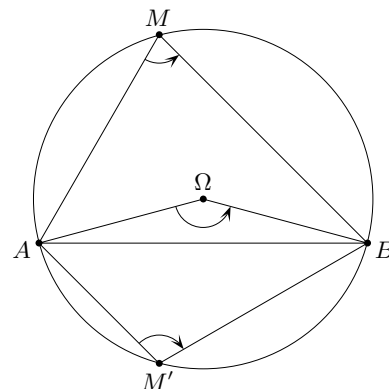
Démonstration Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B . La somme des angles d'un triangle est égale à π mod 2π , donc :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \\ (\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B\Omega}) + (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Or Ω est équidistant des points A , B et M , donc les triangles $A\Omega M$ et $B\Omega M$ sont isocèles en Ω . Nos égalités angulaires deviennent :

$$\begin{cases} 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \\ 2(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Enfin sommons : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}$. ■



7.2 ANGLES ORIENTÉS DE DROITES

Définition (Angle orienté de droites) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et si $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}'$, alors : $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv (\vec{v}, \vec{v}') \pmod{\pi}$.

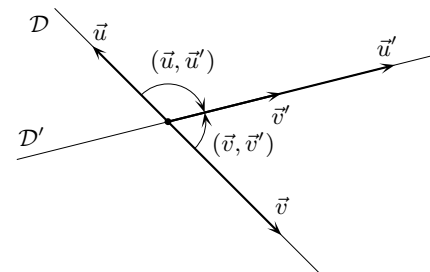
Ceci signifie que la quantité $(\vec{u}, \vec{u}') \pmod{\pi}$ ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$; on l'appelle l'*angle orienté formé par les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$* et on le note $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$. Par définition : $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \equiv (\vec{u}, \vec{u}') \pmod{\pi}$.

Quand $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont définies par deux points distincts chacune, par exemple $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (A'B')$, on note souvent $(AB, A'B')$ l'angle $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

✖✖✖ **Attention !** Un angle orienté de droites est défini modulo π et non modulo 2π comme c'est le cas des angles orientés de vecteurs.

🐼 🐼 🐼 Explication

A priori, quand on veut définir l'angle orienté de deux droites, un problème se pose : deux droites définissent en général deux angles orientés de vecteurs, un aigu et un obtus. Comment dès lors s'en sortir pour définir un angle orienté de droites et non deux ? Réponse : modulo π , les deux angles orientés définis par l'intersection de deux droites sont égaux. C'est pourquoi c'est donc modulo π qu'il convient de définir l'angle orienté de deux droites.



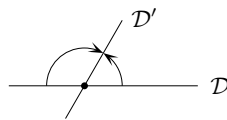
Démonstration Il s'agit de montrer, avec les notations de la définition, que $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv (\vec{v}, \vec{v}') \pmod{\pi}$.

Commençons par travailler modulo 2π : $(\vec{v}, \vec{v}') \stackrel{\text{Chasles}}{\equiv} (\vec{v}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{2\pi}$ ★.

Or puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de D , $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv 0$ ou $\pi \pmod{2\pi}$; de même $(\vec{u}', \vec{v}') \equiv 0$ ou $\pi \pmod{2\pi}$.

Du coup, ★ affirme, modulo π , que $(\vec{u}, \vec{u}') \equiv (\vec{v}, \vec{v}') \pmod{\pi}$ comme voulu. ■

Exemple Sur la figure ci-contre, l'angle de droites (D, D') est égal à $\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$, mais aussi à $-\frac{2\pi}{3} \pmod{\pi}$...



Théorème (Propriétés des angles de droites) Soient D, D', D'' des droites.

(i) **Relation de Chasles :** $(D, D'') \equiv (D, D') + (D', D'') \pmod{\pi}$. En particulier : $(D', D) \equiv -(D, D') \pmod{\pi}$.

(ii) **Parallélisme :** D et D' sont parallèles si et seulement si $(D, D') \equiv 0 \pmod{\pi}$.

(ii) **Orthogonalité :** D et D' sont orthogonales si et seulement si $(D, D') \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Démonstration Soient $\vec{u}, \vec{u}'$ et $\vec{u}''$ des vecteurs directeurs de D, D' et D'' respectivement.

(i) Nous savons que la relation de Chasles est valable dans le monde des angles orientés de vecteurs :

$$(\vec{u}, \vec{u}'') \equiv (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{u}'') \pmod{2\pi}.$$

En particulier : $(\vec{u}, \vec{u}'') \equiv (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', \vec{u}'') \pmod{\pi}$, ce qui signifie comme voulu, par définition des angles orientés de droites, que : $(D, D'') \equiv (D, D') + (D', D'') \pmod{\pi}$.

Pour le cas particulier, poser $D'' = D$.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } D \text{ et } D' \text{ sont parallèles} &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont colinéaires} &\iff (\vec{u}, \vec{u}') \equiv 0 \text{ ou } \pi \pmod{2\pi} \\ &\iff (\vec{u}, \vec{u}') \equiv 0 \pmod{\pi} &\iff (D, D') \equiv 0 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

(iii) Adapter la preuve de (ii). ■

7.3 THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT ET COCYCLICITÉ

Définition (Cocyclicité) Des points sont dits *cocycliques* s'il existe un cercle qui les contient tous.

Théorème (Théorème de l'angle inscrit) Soient A, B, C, D quatre points distincts.

A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si : $(CA, CB) \equiv (DA, DB) \pmod{\pi}$.

⚡⚡⚡ **Attention !** Ici, contrairement au théorème de l'angle au centre, il est question d'angles de **droites**.

Démonstration

- Si A, B, C et D sont alignés, résultat évident. Supposons A, B, C et D cocycliques et notons Ω le centre du cercle qui les contient. D'après le théorème de l'angle au centre : $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \pmod{2\pi}$. Divisons par 2 : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}$, d'où : $(CA, CB) \equiv (DA, DB) \pmod{\pi}$.
- Nous admettrons la réciproque. ■

