

DÉTERMINANT

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats présentés dans ce chapitre, sauf un ou deux, demeurent vrais dans un contexte plus général, mais nous ne nous en préoccupons pas ici.

Les lettres $n, p, q, \dots$ désignent des entiers naturels non nuls.

1 GROUPE SYMÉTRIQUE

1.1 PERMUTATION

Définition (Permutation, groupe symétrique)

- On appelle *permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$* toute bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.
- On note S_n (ou parfois $\mathfrak{S}_n$) l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $(S_n, \circ)$ est un groupe, appelé le *groupe symétrique de degré n* .

En pratique

- On peut représenter commodément de plusieurs façons une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$. La première consiste à écrire σ sous la forme d'une matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Par exemple, si σ est la permutation de S_4 définie par les égalités : $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 3$, alors σ peut être représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Le produit de deux permutations est facile à effectuer à partir de cette représentation. Notez bien que « produit » signifie ici « composition », mais généralement on omet le symbole $\circ$. Par exemple, dans S_5 :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}}^{\sigma} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}}^{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- L'inverse d'une permutation est tout aussi facile à calculer. Par exemple, l'inverse de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans S_4 est $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On détermine $\sigma^{-1}(1)$ en cherchant l'antécédent unique de 1 par σ ; c'est 4, car $\sigma(4) = 1$; etc.

1.2 CYCLES ET TRANSPOSITIONS

Définition (Cycle, transposition)

- Soit $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On appelle *p-cycle de $\llbracket 1, n \rrbracket$* ou *cycle de longueur p de $\llbracket 1, n \rrbracket$* toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour laquelle il existe des éléments deux à deux distincts $x_1, x_2, \dots, x_p$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

$$\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \dots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p \quad \text{et} \quad \sigma(x_p) = x_1$$

et $\sigma(x) = x$ si x n'est aucun des éléments $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Un tel p -cycle est alors noté $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)$, ou $(x_2 \ x_3 \ \dots \ x_p \ x_1)$, ou $(x_3 \ x_4 \ \dots \ x_p \ x_1 \ x_2)$, etc.

- Un 2-cycle de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est aussi appelé une *transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$* .

   **Explication** On peut composer les cycles pour obtenir de nouvelles permutations. On écrira par exemple $(1 \ 2 \ 4 \ 6)(2 \ 5)(3 \ 4 \ 1)$ pour désigner $(1 \ 2 \ 4 \ 6) \circ (2 \ 5) \circ (3 \ 4 \ 1)$. A priori l'ordre compte, car la composition n'est pas commutative.

Deux cycles $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)$ et $(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q)$ sont dits *disjoints* si aucun x_i n'est égal à aucun y_j . On peut montrer que deux cycles disjoints commutent, car ils agissent sur des éléments distincts. On peut montrer également que toute permutation peut être décomposée comme un produit de cycles disjoints. Par exemple $(1 \ 2 \ 4 \ 6)(2 \ 5)(3 \ 4 \ 1)$ est aussi égal à $(1 \ 3 \ 6)(2 \ 5 \ 4)$, où $(1 \ 3 \ 6)$ et $(2 \ 5 \ 4)$ sont disjoints.

Exemple La permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est aussi égale à $(1\ 5\ 4)(3\ 6) = (3\ 6)(1\ 5\ 4)$.

En effet La forme de gauche agit circulairement sur certains paquets d'éléments : elle envoie 1 sur 5, 5 sur 4 et 4 sur 1 ; elle fixe 2 ; et elle envoie 3 sur 6 et 6 sur 3. C'est exactement ce que fait aussi la permutation $(1\ 5\ 4)(3\ 6) = (3\ 6)(1\ 5\ 4)$ — d'où l'égalité.

Exemple La permutation $(2\ 3)(4\ 3\ 1)(4\ 2\ 3)$ de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ est aussi égale à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

En effet $\theta(1) = [(2\ 3)(4\ 3\ 1)](1) = [(2\ 3)](4) = 4$, $\theta(2) = [(2\ 3)(4\ 3\ 1)](3) = [(2\ 3)](1) = 1$,
 $\theta(3) = [(2\ 3)(4\ 3\ 1)](4) = [(2\ 3)](3) = 2$ et $\theta(4) = [(2\ 3)(4\ 3\ 1)](2) = [(2\ 3)](2) = 3$.

Exemple Quelques exemples sur lesquels vous pouvez vous entraîner : $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 4\ 6)(1\ 3\ 5) = (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$,
 $(1\ 3)(3\ 2\ 1\ 4)(3\ 1\ 4)(2\ 1\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)$, $(4\ 5\ 1\ 2)(3\ 4\ 1\ 6)(5\ 4\ 1\ 6)(4\ 2) = (1\ 3\ 5\ 2\ 6)$

Théorème (S_n est engendré par ses transpositions) Toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut être décomposée comme un produit de transpositions.

✖✖✖ **Attention !** Une telle décomposition n'est en aucun cas unique. Par exemple : $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$.

Démonstration Raisonnons par récurrence sur n .

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $S_1 = \{\text{Id}\}$ et Id est le produit de zéro transposition.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut être décomposée comme un produit de transpositions. Qu'en est-il au rang $(n + 1)$? Soit $\sigma \in S_{n+1}$. Distinguons deux cas :

1) **Premier cas** : $\sigma(n + 1) = n + 1$.

Alors $\sigma|_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ que nous notons σ' . Par hypothèse de récurrence, σ' est donc un produit de transpositions dans S_n : $\sigma' = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_p$ — éventuellement $p = 0$.
 Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons τ_k la permutation de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ égale à τ'_k sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et telle que $\tau_k(n + 1) = n + 1$; clairement, τ_k est une transposition, tout comme τ'_k . La relation $\sigma' = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_p$ (dans S_n) devient alors : $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_p$ (dans S_{n+1}), et donc σ est un produit de transpositions.

2) **Second cas** : $\sigma(n + 1) \neq n + 1$.

Notons τ_0 la transposition $((n + 1)\ \sigma(n + 1))$. Alors $\tau_0 \sigma(n + 1) = n + 1$. On est donc ramené au cas précédent : $\tau_0 \sigma$ est un produit de transpositions : $\tau_0 \sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_p$. Multiplions par τ_0 à gauche, en remarquant que $\tau_0^2 = \text{Id}$: $\sigma = \tau_0 \tau_1 \dots \tau_p$. Bref, σ est un produit de transpositions. ■

1.3 SIGNATURE

L'intégralité de ce chapitre repose sur le théorème suivant.

Théorème (**Signature**) Il existe un et un seul morphisme de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$ qui donne à toute transposition la valeur -1 : on l'appelle la *signature* et on le note ε .

Démonstration

- Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des paires $\{i, j\}$ d'entiers $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, μ_σ l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \{i, j\} & \longmapsto & \{\sigma(i), \sigma(j)\} \end{array} \right.$. Il est facile de vérifier que μ_σ est bijective de réciproque $\mu_{\sigma^{-1}}$. Du coup : $\prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{\{u, v\} \in \mathcal{P}} |v - u| = \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}} |j - i|$ après le changement d'indice $\{u, v\} = \mu_\sigma(\{i, j\})$. Ce calcul prouve que le produit $\prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ vaut ± 1 . Notons-le $\varepsilon(\sigma)$.

- Montrons que l'application ε ainsi définie est un morphisme de groupes. Pour toutes permutations $\sigma, \sigma' \in S_n$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma\sigma') &= \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma\sigma'(j) - \sigma\sigma'(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma\sigma'(j) - \sigma\sigma'(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \times \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \prod_{\{u,v\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(v) - \sigma(u)}{v - u} \times \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \quad \text{après le changement d'indice } \{u, v\} = \mu_{\sigma'}(\{i, j\})\end{aligned}$$

- Soit $\tau = (a \ b) \in S_n$ une transposition, où $a, b \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $a < b$. Tâchons de montrer que $\varepsilon(\tau) = -1$. Par définition en tout cas : $\varepsilon(\tau) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}$. Passons simplement en revue les termes de ce produit.

1) Si $\{i, j\} \in \mathcal{P}$ ne contient ni a ni b , alors $\frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \frac{j - i}{j - i} = 1$.

2) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distinct de a et b , regroupons les termes d'indices $\{i, a\}$ et $\{i, b\}$. Leur contribution au produit vaut : $\frac{\tau(a) - \tau(i)}{a - i} \times \frac{\tau(b) - \tau(i)}{b - i} = \frac{b - i}{a - i} \times \frac{a - i}{b - i} = 1$.

3) Pour finir, le terme d'indice $\{a, b\}$ vaut -1 car : $\frac{\tau(b) - \tau(a)}{b - a} = \frac{a - b}{b - a} = -1$.

Conclusion : $\varepsilon(\tau) = -1$ par produit.

- Montrons enfin l'unicité de la signature sur S_n . Soient η et η' deux morphismes de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$ qui donnent à toute transposition la valeur -1 . Montrons qu'alors $\eta = \eta'$. Soit $\sigma \in S_n$. Nous avons vu que σ est un produit de transpositions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$: $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_p$. Comme voulu :

$$\eta(\sigma) = \eta(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_p) = \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) \dots \eta(\tau_p) = (-1)^p = \eta'(\tau_1) \eta'(\tau_2) \dots \eta'(\tau_p) = \eta'(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_p) = \eta'(\sigma). \quad \blacksquare$$

Définition (Parité/imparité) Soit $\sigma \in S_n$. On dit que σ est *paire* si $\varepsilon(\sigma) = 1$, et que σ est *impaire* si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

En particulier, toute transposition est impaire.

Théorème (Signature d'un cycle) Soit $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$. La signature d'un p -cycle de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $(-1)^{p-1}$.

Démonstration Soit $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)$ un p -cycle de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p) = (x_1 \ x_2)(x_2 \ x_3) \dots (x_{p-1} \ x_p)$. Cette décomposition fait intervenir $(p-1)$ transpositions, donc $\varepsilon((x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)) = (-1)^{p-1}$ comme annoncé. $\blacksquare$

Exemple $(1 \ 5 \ 3)(2 \ 4 \ 6 \ 1)(3 \ 4)$ est une permutation paire.

En effet $\varepsilon((1 \ 5 \ 3)(2 \ 4 \ 6 \ 1)(3 \ 4)) = \varepsilon((1 \ 5 \ 3)) \varepsilon((2 \ 4 \ 6 \ 1)) \varepsilon((3 \ 4)) = (-1)^{3-1} (-1)^{4-1} (-1)^{2-1} = 1$.

Définition (Groupe alterné) On appelle *groupe alterné de degré n* , noté A_n (ou parfois $\mathfrak{A}_n$), le noyau de la signature ε sur S_n , i.e. l'ensemble des permutations paires de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors A_n est un sous-groupe de S_n .

2 APPLICATIONS MULTILINÉAIRES

Définition (Application multilinéaire) Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans F . On dit que f est *n -linéaire* si :

« pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tous $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_{k-1} \in E_{k-1}, x_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, x_n \in E_n$ fixés,

$$\text{l'application } \begin{cases} E_k & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{cases} \text{ est linéaire. »}$$

Si $n = 2$, on dit que f est *bilinéaire*; si $n = 3$, que f est *trilinéaire*. Si enfin $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme n -linéaire*.

Explication

- Bref, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f est linéaire par rapport à sa $k^{\text{ème}}$ variable quand on fixe les $(n-1)$ autres.
- Les notions d'application 1-linéaire et d'application linéaire coïncident.

Exemple Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque, l'application $\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow \mathbb{E} \\ (\lambda, x) & \longmapsto \lambda x \end{cases}$ est bilinéaire.

En effet

- **Linéarité par rapport à la première variable :** Soit $x \in E$ fixé. Montrons que $\lambda \mapsto \lambda x$ est linéaire. Or pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $(\alpha\lambda + \beta\mu)x = \alpha\lambda x + \beta\mu x = \alpha(\lambda x) + \beta(\mu x)$.
- **Linéarité par rapport à la deuxième variable :** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé. Montrons que $x \mapsto \lambda x$ est linéaire. Or pour tous $x, y \in E$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda\alpha x + \lambda\beta y = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y)$.

Exemple

- L'application « produit » $\begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto AB \end{cases}$ est bilinéaire.
- L'application « produit » $\begin{cases} \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (f, g) & \longmapsto fg \end{cases}$ est bilinéaire pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- Soient E, E', E'' trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. La « composition » $\begin{cases} \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'') & \longrightarrow \mathcal{L}(E, E'') \\ (f, g) & \longmapsto g \circ f \end{cases}$ est bilinéaire.
- Dans le plan usuel $\mathbb{R}^2$, le déterminant et le produit scalaire sont deux formes bilinéaires de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Dans l'espace à trois dimensions usuel $\mathbb{R}^3$, le déterminant est une forme trilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, et le produit vectoriel est bilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Définition (Forme multilinéaire alternée) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f une forme n -linéaire de E^n . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.
- Pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et $\sigma \in S_n$: $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

On dit dans ces conditions que f est *alternée* (ou *antisymétrique*).

Démonstration

- (ii) $\implies$ (i) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. On suppose que deux des vecteurs de cette famille sont égaux, disons x_i et x_j avec $i < j$. Notons τ la transposition $(i \ j)$. Alors d'après (ii) :

$$\begin{aligned} -f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \varepsilon(\tau)f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) \\ &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{car } x_i = x_j. \end{aligned}$$

Conclusion : $-f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, i.e. : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ comme voulu.

- (i) $\implies$ (ii) Fixons $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$.

1) **Cas des transpositions :** Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$. Notons τ la transposition $(i \ j)$. Alors par n -linéarité :

$$\begin{aligned} &f(x_1, \dots, x_{i-1}, \boxed{x_i + x_j}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \boxed{x_i + x_j}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, \boxed{x_i}, \dots, \boxed{x_j}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \boxed{x_j}, \dots, \boxed{x_i}, \dots, x_n) \\ &+ f(x_1, \dots, \boxed{x_j}, \dots, \boxed{x_i}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \boxed{x_i}, \dots, \boxed{x_j}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

et donc d'après (i) : $f(x_1, \dots, \boxed{x_i}, \dots, \boxed{x_j}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \boxed{x_j}, \dots, \boxed{x_i}, \dots, x_n) = 0$.

Finalement : $f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon(\tau)f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ comme voulu.

2) **Cas général :** Soit $\sigma \in S_n$. Alors $\sigma = \tau_r \tau_{r-1} \dots \tau_1$ est le produit d'un certain nombre de transpositions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. Raisonnons par récurrence.

Initialisation : $f(x_{\tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_1(n)}) = \varepsilon(\tau_1)f(x_1, \dots, x_n)$.

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ tel que $f(x_{\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1(n)}) = \varepsilon(\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1)f(x_1, \dots, x_n)$. Il s'agit de démontrer la même formule au rang $(k+1)$.

$$\begin{aligned} f(x_{\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1(n)}) &\stackrel{1)}{=} \varepsilon(\tau_{k+1})f(x_{\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1(n)}) \\ &\stackrel{\text{HDR}}{=} \varepsilon(\tau_{k+1})\varepsilon(\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1)f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varepsilon(\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1)f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{car } \varepsilon \text{ est un morphisme de groupes.} \end{aligned}$$

Fin de la récurrence : la propriété démontrée pour $k = r$ est notre résultat, puisque $\sigma = \tau_r \tau_{r-1} \dots \tau_1$. ■

Théorème (Propriétés des formes multilinéaires alternées) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f une forme n -linéaire alternée de E^n .

- (i) f est changée en son opposée quand on permute deux de ses variables.
- (ii) On ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.
- (iii) f est nulle sur toute famille liée.

Démonstration

- (i) C'est la définition du caractère alterné de f appliquée au cas des transpositions.
- (ii) Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \lambda_i x_i, x_{k+1}, \dots, x_n\right) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \lambda_i \overbrace{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \dots, x_n)}^{=0 \text{ car } x_i \text{ apparaît deux fois.}}$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- (iii) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille liée de vecteurs de E . Alors pour un certain $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_k est combinaison linéaire de $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$. Du coup, d'après (ii) et la linéarité de f par rapport à sa $k^{\text{ème}}$ variable : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, 0_E, x_{k+1}, x_n) = 0$. ■

3 DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

Définition (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

- Il existe une et une seule forme n -linéaire alternée de E^n , notée $\det_{\mathcal{B}}$, qui donne à $\mathcal{B}$ la valeur 1, i.e. telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. On l'appelle *déterminant dans la base $\mathcal{B}$* .

Toute autre forme n -linéaire alternée f de E^n est un multiple de $\det_{\mathcal{B}}$: $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

- Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$. On note A la matrice de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

××× Attention !

- Seul le déterminant d'une famille de $\boxed{n}$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $\boxed{n}$ est ainsi défini.
- Les formules « $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \dots$ » ne sont jamais utilisées en pratique pour calculer les déterminants, car il faudrait calculer $n!$ produit de n termes — beaucoup de calculs. Nous verrons plus loin des méthodes de calcul rapides des déterminants.

Démonstration Le programme stipule que vous n'êtes pas obligés de savoir refaire cette démonstration.

- **Analyse :** Tâchons de comprendre d'où sort la formule qui définit le déterminant. Soient f une forme n -linéaire alternée de E^n et $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$. Je vous conseille néanmoins de la travailler. Notons A la matrice de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^n a_{k_2 2} e_{k_2}, \dots, \sum_{k_n=1}^n a_{k_n n} e_{k_n}\right) \stackrel{n\text{-linéarité}}{=} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \dots a_{k_n n} f(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}).$$

Dans cette somme, de nombreux termes sont nuls : parce que f est alternée, $f(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}) = 0$ dès que deux vecteurs sont égaux. Nous pouvons donc ne conserver que les n -uplets $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ d'éléments **distincts**. Or se donner un tel n -uplet $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, c'est exactement se donner une application σ **injective** de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, avec $\sigma(i) = k_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les ensembles de départ et d'arrivée étant **finis avec le même nombre d'éléments**, cela revient en fait à se donner une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right) f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right) \times \varepsilon(\sigma) f(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right) f(\mathcal{B}).$$

Conclusion : on obtient bien l'égalité « $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ » si l'on pose $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$.

En particulier, si $f(\mathcal{B}) = 1$, alors $f = \det_{\mathcal{B}}$, de sorte que $\det_{\mathcal{B}}$ est la seule forme n -linéaire alternée de E^n qui donne à $\mathcal{B}$ la valeur 1.

- **Syntaxe :** On pose : $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$ pour toute famille $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$

de matrice A dans $\mathcal{B}$. Vous vérifierez seuls la n -linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$. Montrons que $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et $\varphi \in S_n$. Dans le calcul suivant, on effectue le changement d'indice $j = \varphi(i)$ associé à la permutation φ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, puis le changement d'indice $\theta = \sigma\varphi^{-1}$ associé à la bijection $\begin{cases} S_n & \longrightarrow & S_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\varphi^{-1} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(n)}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)\varphi(i)} \stackrel{j=\varphi(i)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma\varphi^{-1}(j)j} \stackrel{\theta=\sigma\varphi^{-1}}{=} \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta\varphi) \prod_{j=1}^n a_{\theta(j)j} \\ &= \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta)\varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^n a_{\theta(i)i} = \varepsilon(\varphi) \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta) \prod_{i=1}^n a_{\theta(i)i} = \varepsilon(\varphi) \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Montrons enfin que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. La matrice B de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ est I_n , donc $\prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} = 0$ pour toute

permutation $\sigma \in S_n$ distincte de l'identité. Conclusion : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} = \varepsilon(\text{Id}) \prod_{i=1}^n b_{\text{Id}(i)i} = 1$.

- Avec les notations précédentes, il nous reste à montrer la formule : $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$, où l'on a échangé « i » et « $\sigma(i)$ ». Soit $\sigma \in S_n$. Parce que σ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut se servir de σ pour effectuer un changement d'indice $j = \sigma(i)$. Par ailleurs, l'application $\begin{cases} S_n & \longrightarrow & S_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \end{cases}$ est bijective (de réciproque elle-même), donc on peut effectuer un changement d'indice $\varphi = \sigma^{-1}$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \stackrel{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j\sigma^{-1}(j)} \stackrel{\varphi=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{j\varphi(j)} \\ &= \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{j=1}^n a_{j\varphi(j)} \quad (\text{puisque } \varepsilon(\varphi) \in \{-1, 1\}, \text{ on a } \varepsilon(\varphi^{-1}) = \varepsilon(\varphi)^{-1} = \varepsilon(\varphi)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Si $x, y \in E$ ont pour coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2) , alors $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$.

Nous retrouvons ici un résultat connu de début d'année, mais... nous avons défini le déterminant à l'aide de normes et de sinus d'un angle ; nous sommes à présent capables de le définir sans recourir à ces notions.

En effet Par définition : $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)}$. Or le groupe S_2 possède seulement deux éléments :

$$S_2 = \{\text{Id}, \tau\}, \quad \text{où } \tau = (1 \ 2). \text{ Par conséquent : } \det_{\mathcal{B}}(x, y) = \varepsilon(\text{Id}) x_{\text{Id}(1)} y_{\text{Id}(2)} + \varepsilon(\tau) x_{\tau(1)} y_{\tau(2)} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Si $x, y, z \in E$ ont pour coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) , alors $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2$.

C'est comme en début d'année, mais nous avons défini le déterminant à l'aide des produits scalaire et vectoriel, définis eux-mêmes à partir de normes et de cosinus/sinus d'un angle ; nous sommes à présent capables de le définir sans recourir à ces notions.

En effet Par définition : $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)}$. Or $S_3 = \{\text{Id}, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2), (1 \ 3), (1 \ 2), (2 \ 3)\}$.

$$\text{Par conséquent : } \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \underbrace{x_1y_2z_3}_{\text{Id}} + \underbrace{x_2y_3z_1}_{(1 \ 2 \ 3)} + \underbrace{x_3y_1z_2}_{(1 \ 3 \ 2)} - \underbrace{x_3y_2z_1}_{(1 \ 3)} - \underbrace{x_2y_1z_3}_{(1 \ 2)} - \underbrace{x_1y_3z_2}_{(2 \ 3)}.$$

✕✕✕ Attention ! Nous étions habitués à l'idée qu'il n'y a qu'un déterminant dans le plan, et qu'un déterminant dans l'espace. C'est faux : il y a autant de déterminants qu'il y a de bases. Cette fausse impression provenait notamment du fait que nous avions fixé une base de référence $(\vec{i}, \vec{j})$ dans le plan et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace, mais surtout au fait que cette base de référence était orthonormale directe — pour le comprendre, nous reviendrons sur ce point dans un prochain chapitre.

Théorème (Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E .

- (i) **Formule de changement de base :** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.
- (ii) $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$. Dans ce cas : $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})}$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** A quoi le déterminant d'une famille de vecteurs sert-il ? A caractériser les bases, comme en début d'année en dimensions 2 et 3.

Démonstration

- (i) L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire alternée. Le théorème précédent affirme donc que $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$, ce qui est justement le résultat attendu — sorte de relation de Chasles pour les déterminants.
- (ii) Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors d'après (i) : $1 = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$. Ceci montre aussitôt que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est non nul d'inverse $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.

Réciproquement, par contraposition, supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E . Alors $\mathcal{F}$ est liée, car constituée de n vecteurs en dimension n . Or $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire alternée. Donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$. ■

4 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

Définition (Déterminant d'un endomorphisme) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Alors le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie ; on l'appelle le *déterminant de f* et on le note $\det(f)$.

❌ ❌ ❌ **Attention !** Pour commencer, seul le déterminant d'un **endomorphisme** est ainsi défini. Ensuite, le déterminant d'une famille de vecteurs était relatif à une base ; à présent, le déterminant d'un endomorphisme ne dépend d'aucune base.

Démonstration Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Nous voulons montrer que $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}'))$.

- Notons φ l'application $\begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \end{cases}$. Montrons que φ est n -linéaire. Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in E$, $x, x' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x + \lambda' x', x_{k+1}, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_{k-1}), f(\lambda x + \lambda' x'), f(x_{k+1}), \dots, f(x_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_{k-1}), \lambda f(x) + \lambda' f(x'), f(x_{k+1}), \dots, f(x_n)) \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_{k-1}), f(x), f(x_{k+1}), \dots, f(x_n)) + \lambda' \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_{k-1}), f(x'), f(x_{k+1}), \dots, f(x_n)) \\ &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) + \lambda' \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, x', x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Par ailleurs φ est alternée : si on calcule $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sous l'hypothèse que $x_i = x_j$ pour certains $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, alors $f(x_i) = f(x_j)$ et donc comme $\det_{\mathcal{B}}$ est alterné, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

- Ainsi φ est une forme n -linéaire alternée de E^n , et du coup $\varphi = \varphi(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$. Enfin :

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) \stackrel{\text{« Chasles »}}{=} \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \varphi(\mathcal{B}') = \varphi(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})). \quad \blacksquare$$

Théorème (Propriétés du déterminant d'un endomorphisme) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f et g deux endomorphismes de E .

- (i) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E : $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- (ii) $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$.
- (iii) f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.
- (iv) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** D'après (ii) et (iii), le déterminant est un morphisme de groupes de $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$.

*** **Attention !** Le déterminant n'est pas linéaire : en général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f + \mu g) \neq \lambda \det(f) + \mu \det(g)$. Méditez notamment l'assertion (iv).

Démonstration Fixons $\mathcal{B}$ une base de E .

- (i) a été démontrée dans la preuve du théorème précédent sous la forme « $\varphi = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ » avec $\varphi(\mathcal{B}) = \det(f)$.
- (ii) $\det(g \circ f) = \det_{\mathcal{B}}(g(f(\mathcal{B}))) \stackrel{(i)}{=} \det(g) \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det(g) \det(f)$.
- (iii) L'application f est un automorphisme de E si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de E , i.e. si et seulement si $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq 0$. Dans ce cas, $\det$ étant un morphisme de groupes : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.
- (iv) résulte immédiatement de la n -linéarité du déterminant d'une famille de vecteurs. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\det(\lambda f) = \det_{\mathcal{B}}((\lambda f)(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda f(\mathcal{B})) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \lambda^n \det(f).$$

Chaque variable a permis, par linéarité, la sortie d'un λ . ■

5 DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

5.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition (Déterminant d'une matrice carrée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A , vue comme endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, est égal au déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On appelle *déterminant de A* la valeur commune de ces deux notions de déterminant ; ce déterminant est noté $\det(A)$ ou :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{[n]} \quad \text{et vaut :} \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

[n] ← Indication de la taille en indice

*** **Attention !** Seul le déterminant d'une matrice carrée est ainsi défini.

Démonstration Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A dans l'ordre naturel et $\mathcal{B}_n = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors : $\det_{\mathcal{B}_n}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}_n}(A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)) = \det_{\mathcal{B}_n}(A(\mathcal{B}_n)) = \det(A)$, où $\det(A)$ est ici le déterminant de A comme endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Cette égalité est bien celle du théorème.

De plus, $\det_{\mathcal{B}_n}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est par définition $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$ ou encore $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$. ■

Théorème (Propriétés du déterminant d'une matrice carrée) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- (ii) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- (iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- (iv) $\det({}^t A) = \det(A)$.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** D'après (i) et (ii), le déterminant est un morphisme de groupes de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.

*** **Attention !** Le déterminant n'est pas linéaire : en général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$. Méditez notamment l'assertion (iii).

Démonstration Les assertions (i) à (iii) ont été prouvées dans le cas des endomorphismes, donc dans le cas des matrices. Pour (iv), quand on applique la formule « $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$ » à la matrice ${}^t A$, on trouve... la même chose — d'où le résultat. ■

Vous démontrerez seuls le résultat suivant :

Théorème (Relation entre les différentes notions de déterminant) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E .

- (i) Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E . Alors : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$.
- (ii) Soit f un endomorphisme de E . Alors : $\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

  **En pratique** Ce théorème est très pratique, car il montre que tout déterminant (famille de vecteurs ou endomorphisme) peut être calculé comme le déterminant d'une matrice carrée. Nous allons voir bientôt comment on peut calculer rapidement le déterminant d'une matrice.

Et justement, enfin, voici un premier théorème de calcul simple des déterminants.

Théorème (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Alors :

$$\begin{vmatrix} A & \times \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ \times & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B).$$

Démonstration Nous nous contenterons du cas des matrices triangulaires supérieures.

Dans la mesure où $\begin{vmatrix} A & \times \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & \times \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix}$, il nous suffit de montrer que $\begin{vmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(B)$ et que

$\begin{vmatrix} A & \times \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} = \det(A)$. Pour aller vite, nous prouverons seulement la seconde égalité.

A cette fin, posons $M = \begin{pmatrix} A & \times \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$. Alors par définition : $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)}$. Analysons dans

cette grande somme les permutations σ pour lesquelles le terme associé à σ est **non nul**. Si σ fixée est une telle permutation, alors $m_{i\sigma(i)}$ est forcément non nul pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et étant donnée la forme de M , cela veut dire que $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$. A fortiori, par injectivité, les autres valeurs de σ , à savoir $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)$, sont forcément inférieures ou égales à p . Pour cette raison, σ induit par restriction une permutation θ de $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Si θ est le produit dans S_p de r transpositions, alors a fortiori σ est le produit dans S_n des mêmes r transpositions, puisque $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$. Ceci prouve que $\varepsilon(\theta) = (-1)^r = \varepsilon(\sigma)$.

Mais que vaut en retour le terme de $\det(M)$ associé à σ ? Il vaut :

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)} = \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^p m_{i\sigma(i)}}_{\text{Ici } \sigma(i) \leq p} \times \underbrace{\prod_{i=p+1}^n m_{i\sigma(i)}}_{\text{Ici } \sigma(i) = i} = \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^p a_{i\sigma(i)}}_{\text{Matrice } A} \times \underbrace{\prod_{i=p+1}^n 1}_{\text{Matrice } I_{n-p}} = \varepsilon(\theta) \prod_{i=1}^p a_{i\theta(i)}.$$

Après une étude fine des termes éventuellement **non nuls** de la somme $\det(M)$, nous avons bien obtenu le résultat

voulu : $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p a_{i\sigma(i)} = \det(A)$. ■

Corollaire (Déterminant d'une matrice triangulaire) Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Exemple $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-14) \times (-1) = 14$ et $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1) = -2$.

5.2 MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS POUR LE CALCUL DU DÉTERMINANT

Théorème (Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires)

- (i) Quand on ajoute à une ligne (resp. colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. colonne) d'un déterminant, celui-ci n'est pas modifié.
- (ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Quand on multiplie par λ une ligne (resp. colonne) d'un déterminant, celui-ci est multiplié par λ .
- (iii) Quand on permute deux lignes (resp. colonnes) d'un déterminant, celui-ci est multiplié par -1 .

Démonstration Nous savons déjà que les opérations élémentaires sont des multiplications par des matrices inversibles. Du coup, en vertu de la relation « $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ », effectuer une opération élémentaire de matrice P sur un déterminant revient à le multiplier par $\det(P)$. Mais que vaut $\det(P)$ dans les cas (i), (ii) et (iii) ?

(i) **Ajout d'un multiple d'une ligne (resp. colonne) à une autre ligne (resp. colonne) :**

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(ii) **Multiplication d'une ligne (resp. colonne) par λ :**

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} = \lambda.$$

(iii) **Permutation de deux lignes (resp. colonnes) :** En réalité, on peut simuler la permutation des lignes i et j en effectuant successivement les opérations élémentaires suivantes :

$$L_i \leftarrow L_i + L_j, \quad L_j \leftarrow L_j - L_i, \quad L_i \leftarrow L_i + L_j \quad \text{et} \quad L_j \leftarrow -L_j.$$

D'après (i), les trois premières opérations ne modifient pas le déterminant de la matrice ; d'après (ii), le déterminant est multiplié par -1 . Au total, la permutation des lignes i et j a coûté un facteur -1 . Même raisonnement avec les colonnes. ■

   **En pratique** Le théorème précédent nous permet d'utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour calculer les déterminants. Grâce à cet algorithme, on peut ramener le calcul d'un déterminant quelconque au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire, qui est alors le produit des éléments diagonaux obtenus. Comme toujours, la méthode du pivot de Gauss est **LA** méthode reine, ici pour le calcul des déterminants.

Exemple $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

En effet

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -16 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -16 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 3 \\ -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 2 & -16 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_2, \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 0 & 34 & -9 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} 34 & -9 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-34 + 36) = 2. \end{aligned}$$

Exemple Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)^2 \begin{vmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + bL_2 + bL_3 \end{matrix} = (b-a)^2(a+2b). \end{aligned}$$

5.3 DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT À UNE LIGNE OU UNE COLONNE ET FORMULE D'INVERSION

Définition (Mineurs, cofacteurs, comatrice) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

- On appelle *mineur de A de position (i, j)* le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue à partir de A par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.
- On appelle *cofacteur de A de position (i, j)* le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.
- On appelle *comatrice de A*, notée $\text{com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A : $\text{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

🐞 🐞 🐞 Explication

Le cofacteur de position (i, j) est égal au mineur de même position, au signe près. Mais comment ces signes sont-ils distribués ? La matrice ci-contre schématise leur distribution.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème (Développement par rapport à une ligne ou une colonne) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note Δ_{ij} le mineur de A de position (i, j) .

(i) **Développement par rapport à une ligne** : Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

(ii) **Développement par rapport à une colonne** : Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

🐞 🐞 🐞 **Explication** Ces formules ne s'apprennent pas par cœur. Elles se comprennent sur des exemples simples. En voici un, où l'on développe par rapport à la première colonne :

Ceci ne doit pas figurer sur vos copies, c'est juste pour vous expliquer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Ici, la nullité du déterminant montre que la matrice 3×3 considérée n'est pas inversible.

Démonstration Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par transposition, nous pouvons nous contenter de démontrer le résultat dans le cas d'un développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Le déterminant est linéaire par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ variable-ligne.

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On échange la $i^{\text{ème}}$ ligne avec la $(i-1)^{\text{ème}}$, puis la $(i-1)^{\text{ème}}$ avec la $(i-2)^{\text{ème}}$, etc. Au total, $(i-1)$ échanges de lignes, d'où le coefficient $(-1)^{i-1}$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \text{Idem sur les colonnes.} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \text{La matrice \u00e9tait triangulaire par blocs.} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}. & \text{C'est le r\u00e9sultat voulu.} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

  **En pratique** Le d\u00e9veloppement par rapport \u00e0 une ligne/colonne est une m\u00e9thode utile de calcul des d\u00e9terminants. Dans la mesure du possible, il faut choisir de d\u00e9velopper par rapport \u00e0 une ligne/colonne contenant de nombreux 0 : les calculs en sont grandement simplifi\u00e9s. Cela dit je vous conseille de privil\u00e9gier le pivot de Gauss. Pourquoi ? Parce que les r\u00e9sultats qu'elle fournit se pr\u00e9sentent g\u00e9n\u00e9ralement sous forme factoris\u00e9e. Or ce que l'on aime savoir d'un d\u00e9terminant, c'est s'il est nul ou non.

Exemple $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$

En effet Le calcul va s'av\u00e9rer assez rapide ici car il y a pas mal de z\u00e9ros dans le d\u00e9terminant consid\u00e9r\u00e9.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \text{(d\u00e9veloppement par rapport \u00e0 la 3\u00e8me colonne)} \\
&= (-1) \left((-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) + \left(-(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-1) \left((-1) \times 5 - 2 \times (-2) \right) + \left(-(-1) \times 3 \right) = 4. \\
& \text{(d\u00e9veloppement par rapport \u00e0 la 1\u00e8re colonne deux fois)}
\end{aligned}$$

Corollaire (Formule d'inversion) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $A {}^t\text{com}(A) = {}^t\text{com}(A) A = \det(A) I_n$.

En particulier, si A est inversible : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A)$.

D\u00e9monstration Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons Δ_{ij} le mineur de A de position (i, j) . Par d\u00e9finition de la comatrice, on a : $\text{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Contentons-nous de montrer que $A {}^t\text{com}(A) = \det(A) I_n$, i.e. que $\sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk} = \det(A) \delta_{ij}$ pour tous

$i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, o\u00f9 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Fixons donc $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Supposons d'abord que $i = j$ et montrons que $\sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \Delta_{ik} = \det(A)$. Or c'est d\u00e9j\u00e0 fait, c'est juste un d\u00e9veloppement par rapport \u00e0 la $i^{\text{e}}\text{me}$ ligne.

- Supposons ensuite que $i \neq j$ et montrons que $\sum_{k=1}^n a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk} = 0$. Remplaçons dans A la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$ et notons B la matrice obtenue. Alors $\det(B) = 0$ car les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de B sont égales. Mais par ailleurs, développons $\det(B)$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ ligne. Les mineurs de A et B associés à cette ligne étant égaux : $0 = \det(B) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} b_{jk} \Delta_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}$. C'est le résultat voulu. ■

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Si $\det(A) = ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Nous retrouvons ainsi un résultat bien connu.

××× Attention ! La formule d'inversion précédente est très importante, mais seulement quand dans des contextes théoriques. En tout cas, il ne faut surtout pas s'en servir pour inverser une matrice concrète. Alors que la méthode du pivot de Gauss est rapide et simple, la formule d'inversion ramène le calcul de A^{-1} au calcul de $\det(A)$ et $\text{com}(A)$. Or chaque coefficient de $\text{com}(A)$ est lui-même un déterminant. Cela nous fait un déterminant de taille n à calculer, puis n^2 déterminants de taille $(n-1)$. Beaucoup de calculs, donc.

6 APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS

6.1 SYSTÈMES DE CRAMER

On rappelle qu'un système de Cramer est un système linéaire dont la matrice est (carrée) inversible.

Théorème (Expression de la solution d'un système de Cramer à l'aide de déterminants) Soient $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_j la matrice obtenue en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par B . Soit en outre $X \in \mathbb{K}^n$ la solution unique du système de Cramer $AX = B$. Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

Démonstration Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A dans l'ordre naturel et $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Affirmer que $AX = B$ revient à affirmer que $\sum_{k=1}^n x_k C_k = B$. Du coup, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \det(A_j) &= \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{B}_n}\left(C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, \sum_{k=1}^n x_k C_k, C_{j+1}, \dots, C_n\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= x_j \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \quad \text{car le déterminant est alterné} \\ &= x_j \det(A). \quad \text{C'est le résultat annoncé.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

××× Attention ! Ce résultat est surtout théorique — sauf pour $n = 2$, ci-dessous — car le calcul de X décrit ci-dessus nous ramène au calcul de $(n+1)$ déterminants de taille n : c'est bien plus long que la méthode usuelle du pivot de Gauss.

Exemple Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{C}$ tels que $ab' - a'b \neq 0$. La solution $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ du système de Cramer $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est donnée par les expressions suivantes :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

6.2 ORIENTATION D'UN ESPACE VECTORIEL RÉEL DE DIMENSION FINIE

✖ ✖ ✖ **Attention !** Dans ce paragraphe, on travaille seulement avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition (Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

- On définit sur l'ensemble des bases de E une relation « avoir la même orientation que » de la façon suivante :

une base $\mathcal{B}'$ de E a la même orientation qu'une base $\mathcal{B}$ de E si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

- La relation « avoir la même orientation que » est réflexive, symétrique et transitive. Il y a exactement deux orientations possibles : si $\mathcal{B}$ n'a pas la même orientation que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, alors $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ ont la même orientation.

- Orienter* E , c'est par définition décréter arbitrairement qu'une certaine base fixée $\mathcal{B}$ de E est *directe* ; toutes les bases de E de même orientation que $\mathcal{B}$ sont alors aussi qualifiées de *directes* ; les autres sont qualifiées d'*indirectes*.

✂ ✂ ✂ Explication

- Nous avons déjà observé en début d'année que l'orientation pouvait se tester à l'aide d'un déterminant. Nous ne faisons que généraliser ce résultat, à ceci près qu'ici nous n'énonçons pas un résultat, mais une définition de l'orientation.
- Jusqu'ici, nous avons fait comme si le plan et l'espace étaient munis d'une orientation naturelle. Mais nous n'avons jamais défini proprement ce que nous entendions par là. Comme l'explique la définition ci-dessus, la notion d'orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E repose sur l'idée qu'on peut regrouper les bases de E en deux paquets disjoints au moyen du déterminant ; les unes sont qualifiées de directes, les autres d'indirectes. Mais comment savoir lesquelles sont directes, lesquelles sont indirectes ? La question n'a pas de sens en fait ; l'orientation d'un espace vectoriel résulte d'un choix arbitraire : on choisit d'appeler directes les bases d'un paquet, indirectes les bases de l'autre. Une fois qu'on a effectué un tel choix, on le conserve pendant toute la durée du travail que l'on veut effectuer. Mais rien n'empêche qu'on modifie ce choix dans un autre travail. Au fond ce caractère arbitraire de la notion d'orientation n'est pas surprenant. Selon que vous vous placez au-dessus ou au-dessous d'un plan, vous n'avez pas la même appréciation de l'orientation : les bases qui vous semblent directes d'un côté vous semblent indirectes de l'autre. La notion d'orientation ne s'en trouve pas ruinée, car l'essentiel, c'est ceci : deux bases qui ont la même orientation quand on regarde le plan d'en haut ont aussi la même orientation quand on regarde le plan d'en bas.

Démonstration Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E .

- Montrons que la relation « avoir la même orientation que » est réflexive. C'est facile : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$.
- Montrons que la relation « avoir la même orientation que » est symétrique. Supposons donc que $\mathcal{B}'$ a la même orientation que $\mathcal{B}$; cela veut dire que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. Alors $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')} > 0$, et ainsi $\mathcal{B}$ a bien la même orientation que $\mathcal{B}'$.
- Montrons que la relation « avoir la même orientation que » est transitive. Supposons donc que $\mathcal{B}'$ a la même orientation que $\mathcal{B}$ et que $\mathcal{B}''$ a la même orientation que $\mathcal{B}'$; cela veut dire que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et que $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$, et donc $\mathcal{B}''$ a la même orientation que $\mathcal{B}$.
- Montrons qu'il existe exactement deux orientations possibles de E . Il suffit pour cela de montrer le résultat suivant : si $\mathcal{B}$ n'a pas la même orientation que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, alors $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ ont la même orientation. Plaçons-nous dans ce contexte, de sorte que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$ et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') < 0$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')} > 0,$$

ce qui montre bien que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ ont la même orientation. ■