

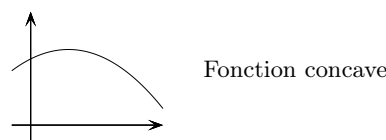
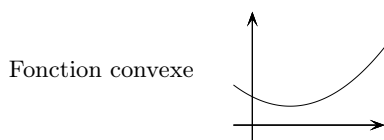
CONVEXITÉ

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition (Fonction convexe/concave) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f est *convexe sur I* si : $\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.
- On dit que f est *concave sur I* si $-f$ est convexe sur I , i.e. si :

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

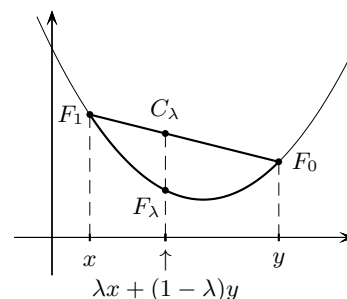


🔗 🔗 🔗 **Explication** Quelle interprétation géométrique de la convexité ? Fixons $x, y \in I$ tels que $x < y$ et notons F_λ le point de coordonnées $(\lambda x + (1 - \lambda)y, f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$ et C_λ le point de coordonnées $(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$.

L'inégalité qui définit la convexité de f signifie que F_λ est situé sous C_λ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Or quand λ décrit $[0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y$ décrit le segment $[x, y]$, et donc F_λ décrit la portion du graphe de f associée à cet intervalle.

Que fait C_λ pendant ce temps ? Remarquons tout d'abord que $C_0 = F_0 = (y, f(y))$, que $C_1 = F_1 = (x, f(x))$, et que $C_\lambda = \lambda F_1 + (1 - \lambda)F_0$, i.e. que C_λ est le barycentre des points pondérés (F_1, λ) et $(F_0, 1 - \lambda)$. Cette remarque montre que C_λ décrit le segment $[F_0 F_1]$ quand λ décrit $[0, 1]$.

Conclusion : à x, y fixés, la convexité de f signifie que le sous-arc du graphe de f associé au segment $[x, y]$ est situé sous sa corde $[F_0 F_1]$. Sur I , la convexité de f signifie donc que tout sous-arc du graphe de f est situé sous sa corde.



⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** « Concave » n'est pas le contraire de « convexe » : la fonction sinus n'est ni concave ni convexe !

Exemple La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda| \cdot |x| + |1 - \lambda| \cdot |y| \stackrel{\lambda \in [0, 1]}{=} \lambda |x| + (1 - \lambda)|y|.$$

Dans ce qui suit, on se contentera d'énoncer les propriétés des fonctions convexes pour alléger le contenu du cours. Le cas des fonctions concaves s'en déduit aussitôt, puisqu'une fonction concave est l'opposé d'une fonction convexe : il suffit de remplacer, par exemple, le positif par le négatif, la croissance par la décroissance, le dessus par le dessous, etc.

Nous avons ci-dessus au passage prouvé le résultat suivant :

Théorème (Convexité et position par rapport aux cordes) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

f est convexe sur I si et seulement si tout sous-arc du graphe de f est situé sous sa corde.

Théorème (Monotonie des pentes des cordes) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

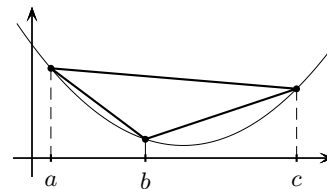
$$f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si pour tout } a \in I, \text{ l'application } \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases} \text{ est croissante.}$$

En particulier, si f est convexe sur I , on a les inégalités suivantes :

$$\forall a, b, c \in I, \quad a < b < c \implies \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Explication

On a représenté ci-contre les cordes associées aux points de la courbe de paramètres a, b et c , où $a < b < c$. Les pentes de ces trois cordes sont rangées dans un ordre dont la série d'inégalités « $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ » est la traduction rigoureuse.



Démonstration

- Supposons f convexe sur I . Soit $a \in I$. Montrons que l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Donnons-nous pour cela $x, y \in I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$ et distinguons trois cas.

1) Supposons qu'on ait $x < y < a$. Alors il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)a$. La convexité de f montre alors que $f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(a)$, i.e. que : $f(y) - f(a) \leq \lambda(f(x) - f(a))$. Or $\lambda = \frac{y-a}{x-a}$.

Comme voulu, puisque $y-a < 0$, on a bien : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

2) Supposons qu'on ait $x < a < y$. Alors il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $a = \lambda x + (1-\lambda)y$. La convexité de f montre alors que $f(a) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Or $f(a) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. On peut donc affirmer ceci : $\lambda(f(x) - f(a)) \leq (1-\lambda)(f(y) - f(a))$. Mais comme $\lambda = \frac{y-a}{y-x}$ et $1-\lambda = \frac{a-x}{y-x}$, on obtient

comme voulu : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

3) Supposons qu'on ait $a < x < y$. Imiter les deux cas précédents.

- Supposons l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ croissante sur $I \setminus \{a\}$ pour tout $a \in I$ et montrons que f est convexe. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous devons montrer l'inégalité : $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. On peut supposer $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ et $x \neq y$, et même $x < y$ quitte à remplacer λ par $(1-\lambda)$.

Posons alors $a = \lambda x + (1-\lambda)y$, de sorte que $x < a < y$. Comme par hypothèse l'application $t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est croissante, alors : $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$, i.e. :

$$(y-a)(f(a)-f(x)) \leq (a-x)(f(y)-f(a)), \quad \text{puis :} \quad \frac{y-a}{y-x} (f(a)-f(x)) \leq \frac{a-x}{y-x} (f(y)-f(a)).$$

Or $\lambda = \frac{y-a}{y-x}$ et $1-\lambda = \frac{a-x}{y-x}$. Le résultat en découle. ■

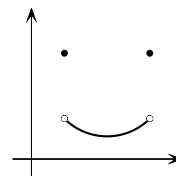
Exemple La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2-a^2}{x-a} = x+a$ est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Théorème (Régularité des fonctions convexes) Ici, l'intervalle I est supposé **OUVERT**. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- f est continue sur I .
- f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I .

Attention !

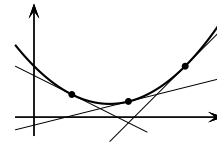
- Il est essentiel que l'intervalle I soit **OUVERT** : la fonction « smiley » ci-contre est convexe, mais pas continue aux bornes.
- Une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable « tout court » en un point donné : seulement à gauche et à droite. Par exemple, la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.



Démonstration Soit $a \in I$. Par convexité de f , la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$, donc possède une limite à gauche et une limite à droite finies en a en vertu du théorème de la limite monotone. En d'autres termes f est dérivable à gauche et à droite en a , donc en particulier continue à gauche et à droite en a , donc continue en a . ■

Théorème (Fonctions convexes dérivables) Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est convexe sur I .
- (ii) f' est croissante sur I .
- (iii) Le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.



Démonstration

- (i) $\implies$ (ii) Supposons f convexe sur I et montrons que f' est croissante sur I . Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$.
 Pour tout $t \in]x, y[$, par monotonie des pentes des cordes : $\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}$.
 Faisons tendre t vers x à droite et vers y à gauche — en deux temps, bien sûr : $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$.
- (ii) $\implies$ (iii) Supposons f' croissante sur I et montrons que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes. Soit $a \in I$. Notons φ l'application $x \mapsto f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$ définie sur I . Cette application est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$.
 Or f' est croissante, donc φ' est négative à gauche de a et positive à droite de a . Par conséquent φ est décroissante à gauche de a et croissante à droite. Comme $\varphi(a) = 0$, on en déduit que φ est positive ou nulle sur tout I , i.e. que le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a .
- (iii) $\implies$ (i) Supposons le graphe de f situé au-dessus de toutes ses tangentes et montrons que f est convexe sur I . Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Par hypothèse : $f(t) \geq f'(a)(t - a) + f(a)$ pour tout $t \in I$, donc : $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq \lambda(f'(a)(x - a) + f(a)) + (1 - \lambda)(f'(a)(y - a) + f(a))$
 $= f'(a)(\lambda x + (1 - \lambda)y - a) + f(a) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$. ■

Exemple

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction puissance $x \mapsto x^{2n}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- (ii) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$.
- (iii) La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leq x - 1$.
- (iv) La fonction sinus est concave sur $[0, \pi]$. En particulier, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$.

En effet Dans tous les cas, il suffit d'étudier la monotonie de la dérivée — et non pas son signe, attention !

- (ii) Le graphe de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0.
- (iii) Le graphe de la fonction logarithme est situé sous sa tangente en 1.
- (iv) Le graphe de la fonction sinus est situé sous sa tangente en 0 d'équation $y = x$, et au-dessus de la corde joignant les points de paramètres 0 et $\frac{\pi}{2}$, d'équation $y = \frac{2}{\pi} x$.

Théorème (Inégalité de convexité généralisée) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in I^n$ et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in [0, 1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Démonstration Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Important : pour $n = 2$, on retrouve la définition de la convexité.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons l'hypothèse que :

$$\forall (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in I^n, \quad \forall (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in [0, 1]^n, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \implies f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Soient $(x_k)_{1 \leq k \leq n+1} \in I^{n+1}$ et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n+1} \in [0, 1]^{n+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Si $\lambda_{n+1} = 0$, nous n'avons rien à démontrer. Supposons donc $\lambda_{n+1} \neq 0$ et posons $x'_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}$ ainsi que $\lambda'_n = \lambda_n + \lambda_{n+1}$. Alors $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda'_n = 1$, donc nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence aux familles $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x'_n)$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda'_n)$:

On regroupe deux points en un seul par associativité du barycentre.

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda'_n x'_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda'_n f(x'_n).$$

$$\text{Or } f \text{ est convexe sur } I, \text{ donc : } f(x'_n) = f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n} x_{n+1}\right) \leq \frac{\lambda_n}{\lambda'_n} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda'_n} f(x_{n+1}).$$

$$\text{Conclusion, comme voulu : } f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k). \quad \blacksquare$$

Exemple Pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\underbrace{\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}}_{\text{Moyenne harmonique}} \leq \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{Moyenne géométrique}} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k}_{\text{Moyenne arithmétique}}$$

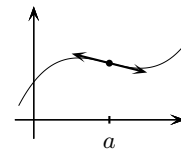
En effet Tout repose étrangement sur la concavité de la fonction logarithme, déjà démontrée plus haut.

$$\text{Comme } \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^{n \text{ fois}} = 1, \text{ aussitôt : } \ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln x_k = \ln\left[\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right]. \text{ Et un petit coup}$$

d'exponentielle : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}$. Pour l'inégalité sur la moyenne harmonique, remplacez simplement dans ce résultat x_k par $\frac{1}{x_k}$ pour tout $k \in [1, n]$.

Définition (Point d'inflexion)

Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite. On dit que f possède un *point d'inflexion en a* si f est convexe sur un voisinage de a à gauche et concave sur un voisinage de a à droite, ou le contraire.



Théorème (Points d'inflexion d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$) Soient $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

f possède un point d'inflexion en a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .

Démonstration

- Faisons l'hypothèse que f possède un point d'inflexion en a et que, par exemple, f est convexe sur un voisinage de a à gauche et concave sur un voisinage de a à droite — raisonnement analogue dans l'autre cas. Alors f' est croissante sur un voisinage de a à gauche et décroissante sur un voisinage de a à droite. Donc f'' est positive sur un voisinage de a à gauche et négative sur un voisinage de a à droite. Or f'' est continue par hypothèse en a , donc $f''(a)$ est à la fois positif et négatif, i.e. nul. Bref, f'' s'annule et change de signe en a .
- Faisons l'hypothèse que f'' s'annule et change de signe en a , par exemple que f'' est positive sur un voisinage de a à gauche et négative sur un voisinage de a à droite — raisonnement analogue dans l'autre cas. Alors f' est croissante sur un voisinage de a à gauche et décroissante sur un voisinage de a à droite. Donc f est convexe sur un voisinage de a à gauche et concave sur un voisinage de a à droite. $\blacksquare$

Exemple Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. La fonction polynomiale $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ possède un unique point d'inflexion sur $\mathbb{R}$, en $-\frac{b}{3a}$.

En effet La dérivée seconde de la fonction $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ est la fonction $x \mapsto 6ax + 2b$, qui s'annule en changeant de signe en $-\frac{b}{3a}$.

Exemple La fonction sinus hyperbolique possède un point d'inflexion en 0.