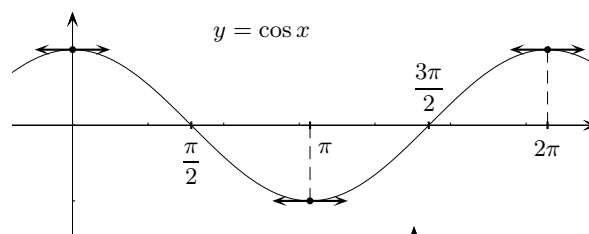
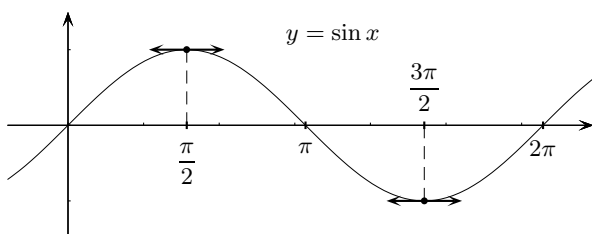


FONCTIONS CIRCULAIRES

Définition (Fonctions sinus et cosinus)

• **Définition analytique :** L'existence des fonctions sinus et cosinus est admise. Ces fonctions sont définies et dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus paire et en outre :

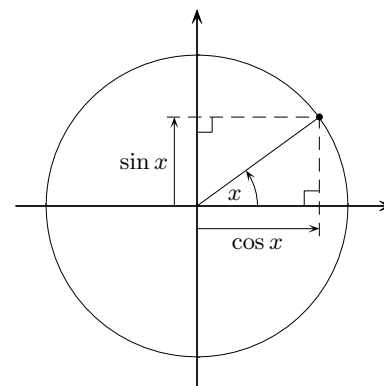
$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin.$$



• Lien avec le cercle trigonométrique :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Réciproquement, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près, tel que $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Géométriquement, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique peut être écrit sous la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$ avec unicité du θ à 2π près.



• Résolution d'équations :

$$\begin{cases} \sin x = \sin y & \iff x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \pi - y \pmod{2\pi} \\ \cos x = \cos y & \iff x \equiv y \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv -y \pmod{2\pi} \end{cases}$$

• Transformations remarquables :

$\sin(x + \pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(x + \pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Ces relations se lisent toutes sur le cercle trigonométrique. Il ne faut donc pas les apprendre bêtement, mais les comprendre.

• Formules d'addition et de produit :

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$	$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$	$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$	$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$	$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$	$\cos x \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) - \sin(x - y))$	$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$

• Formules de duplication :

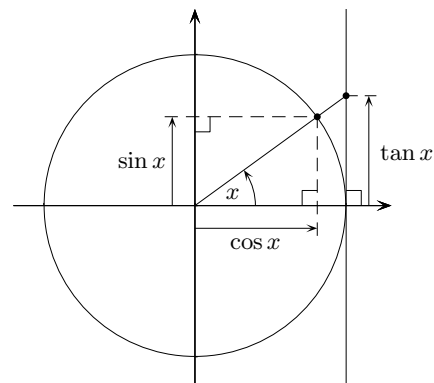
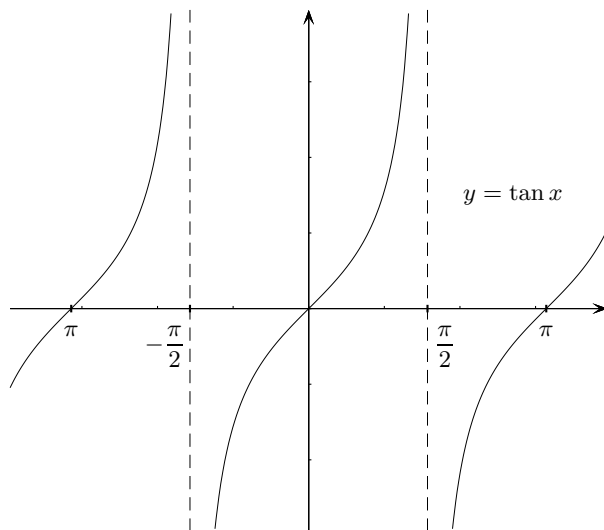
$$\sin(2x) = 2 \cos x \sin x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Définition (Fonction tangente)

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ par la relation : $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. Elle est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition, π -périodique et impaire, et de plus :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$



Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs de x et y pour lesquelles chaque terme est bien défini.

- Résolution d'équations :**

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \pmod{\pi}.$$

- Formules d'addition et de duplication :**

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad \text{et} \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

- Expressions en fonction de $\tan \frac{x}{2}$:** Si on pose $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×

Les valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente doivent être connues **PAR CŒUR** !

Théorème Soient a et b deux réels. Il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \psi).$$

Attention : φ et ψ dépendent de a et b , mais pas de θ .

🐰 🐰 🐰 **Explication** Nous aurons l'occasion d'utiliser souvent ce théorème : en physique, en géométrie, dans le chapitre « Equations différentielles »...

Démonstration Si $a = b = 0$, le résultat est trivial : toute valeur de φ (resp. ψ) convient. Nous pouvons donc supposer $(a, b) \neq (0, 0)$, i.e. que $a^2 + b^2 \neq 0$.

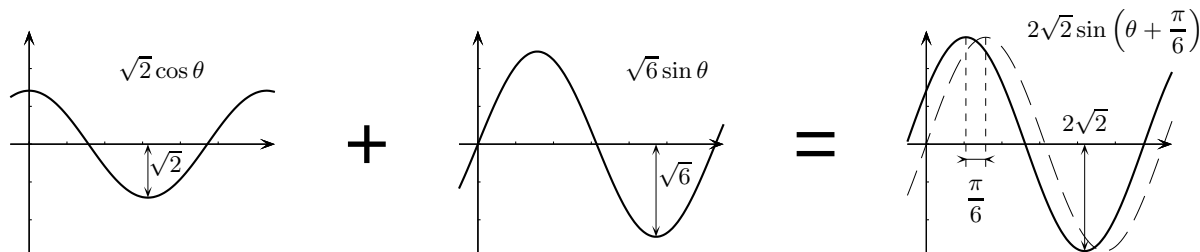
- **Existence de φ** : Posons $x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $y = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Comme $x^2 + y^2 = 1$, on peut écrire (x, y) sous la forme $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ pour un certain $\varphi \in \mathbb{R}$. Du coup, pour tout réel θ :

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (x \cos \theta - y \sin \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \varphi). \end{aligned}$$

- **Existence de ψ** : Posons $x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Comme $x^2 + y^2 = 1$, on peut écrire (x, y) sous la forme $(\cos \psi, \sin \psi)$ pour un certain $\psi \in \mathbb{R}$. Du coup, pour tout réel θ :

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (y \cos \theta + x \sin \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \sin \psi + \sin \theta \cos \psi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \psi). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Exemple Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{6} \sin \theta = 2\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$. Interprétation physique : la somme des signaux sinusoïdaux $\theta \mapsto \sqrt{2} \cos \theta$ et $\theta \mapsto \sqrt{6} \sin \theta$ est encore un signal sinusoïdal, de nouvelle amplitude $2\sqrt{2}$ et déphasé de $\frac{\pi}{6}$.



En effet Tout d'abord : $\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Du coup, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{6} \sin \theta = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) = 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{6} \sin \theta \right) = 2\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right).$$