

CONTINUITÉ

Dans tout ce chapitre, les lettres $I, J, \dots$ désignent des RÉUNIONS finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ — éventuellement des intervalles de $\mathbb{R}$, mais pas forcément.

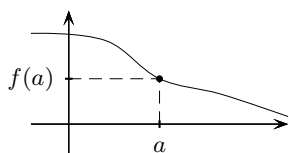
1 DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1.1 DÉFINITIONS

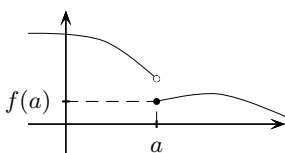
Définition (Continuité en un point) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. On dit que f est *continue en a* si $\lim_a f$ existe. On sait dans ce cas, f étant définie en a , que $\lim_a f = f(a)$. Ainsi on peut dire que, par définition, f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in I, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

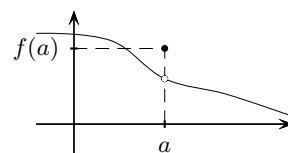
ce qui revient aussi à dire que : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.



f est continue en a .



f n'est pas continue en a .



f n'est pas continue en a .

Définition (Continuité sur une réunion finie d'intervalles) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *continue sur I* si f est continue en tout point de I .

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

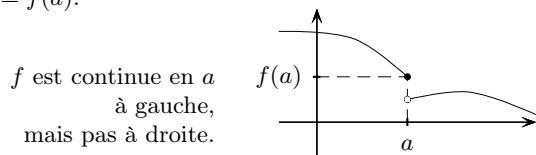
Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En effet Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\cdot|$ est continue en a . Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après l'inégalité triangulaire raffinée : $||x| - |a|| \leq |x - a|$. Posons donc $\alpha = \varepsilon$. Comme voulu : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| < \alpha \implies ||x| - |a|| < \varepsilon$.

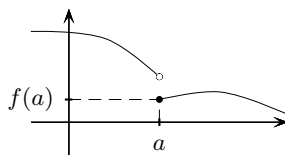
Définition (Continuité à gauche/à droite en un point) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.

- Si f est définie au voisinage de a à gauche, on dit que f est *continue à gauche en a* si $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ est continue en a , i.e. si $\lim_{a^-} f = f(a)$.

- Si f est définie au voisinage de a à droite, on dit que f est *continue à droite en a* si $f|_{I \cap [a, \infty[}$ est continue en a , i.e. si $\lim_{a^+} f = f(a)$.



f est continue en a
à gauche,
mais pas à droite.



f est continue en a
à droite,
mais pas à gauche.

Théorème (Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a .

Démonstration Nous avons déjà montré ailleurs que : $\lim_a f = f(a) \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = f(a)$. ■

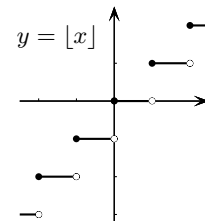
Exemple La fonction partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue à droite, mais pas à gauche, en tout entier relatif.

En effet Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$.

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor$ et donc $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue à droite en n .

Au contraire, pour tout $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$.

Alors $\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \neq \lfloor n \rfloor = n$ et donc f n'est pas continue à gauche en n .



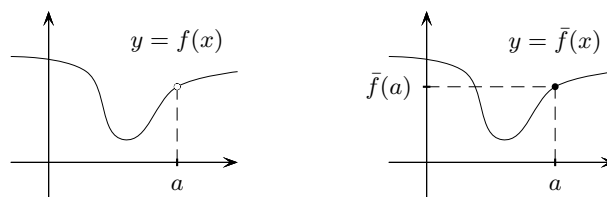
1.2 PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ EN UN POINT

Définition (Prolongement par continuité en un point) Soient $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si $\lim_a f$ existe et est finie, on dit que f est *prolongeable par continuité en a* . Le prolongement $\bar{f}$ de f obtenu en posant $\bar{f}(a) = \lim_a f$ est alors continu en a .

Les fonctions f et $\bar{f}$ sont distinctes en toute rigueur puisqu'elles n'ont pas le même domaine de définition, mais on choisit généralement de noter encore f le prolongement $\bar{f}$, histoire de simplifier.

🔗 🔗 🔗 Explication

Voici comment on peut représenter graphiquement ce théorème dans le cas où $a \in I$ — figures analogues si a est une borne de I .



Démonstration Nous devons montrer que $\bar{f}$ est continue en a , i.e. que $\lim_a \bar{f} = \bar{f}(a)$. Par définition de $\bar{f}$, $\bar{f}$ et f coïncident sur $I \setminus \{a\}$, donc l'égalité $\lim_a f = \bar{f}(a)$ peut être écrite ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| < \alpha \implies |\bar{f}(x) - \bar{f}(a)| < \varepsilon \quad \star.$$

C'est presque le résultat voulu mais pas tout à fait, car $\bar{f}$ est aussi définie en a et il faut en tenir compte. La proposition « $|x - a| < \alpha \implies |\bar{f}(x) - \bar{f}(a)| < \varepsilon$ » étant trivialement vraie pour $x = a$, on peut réécrire $\star$ comme on le souhaite : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in I, \quad |x - a| < \alpha \implies |\bar{f}(x) - \bar{f}(a)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$

Exemple

- La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0, car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- La fonction $x \mapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

1.3 CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en a .
- Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$.

Démonstration Conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la limite. $\blacksquare$

🔗 🔗 🔗 **En pratique** Ce théorème est le plus souvent utilisé dans le contexte suivant, que nous connaissons bien : celui des suites définies par une relation de récurrence de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si f est définie et continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

Le résultat suivant est une jolie application ultra-classique de la caractérisation séquentielle de la continuité et du fait que tout réel est limite de rationnels.

Théorème (Equation fonctionnelle des homothéties)

- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Alors f est une homothétie, i.e. une fonction de la forme $x \mapsto \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Ce résultat peut s'exprimer aussi de la façon suivante : les endomorphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ qui sont continus sur $\mathbb{R}$ sont exactement toutes les homothéties.

Démonstration Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Montrons que f est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, donc en effet $f(-x) = -f(x)$.

2) Montrons que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f(nx) = nf(x)$. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

Initialisation : $f(0.x) = f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = 2f(0.x)$, donc $f(0.x) = 0 = 0.f(x)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(nx) = nf(x)$. Montrons que $f((n+1)x) = (n+1)f(x)$.

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

3) Montrons que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $f(nx) = nf(x)$.

D'après 2), il nous reste à montrer le résultat pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. En l'occurrence :

$$f(nx) = f(-(-n)x) \stackrel{1)}{=} -f((-n)x) \stackrel{2)}{=}_{-n \in \mathbb{N}} -(-n)f(x) = nf(x).$$

4) On pose $\lambda = f(1)$. Montrons que $f|_{\mathbb{Q}} = \lambda \text{Id}_{\mathbb{Q}}$.

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors $qf(r) = f(qr) = f(p) = f(p.1) = pf(1) = \lambda p$ d'après 3),

donc $f(r) = \lambda \frac{p}{q} = \lambda r$.

5) Montrons que $f = \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme tout réel est limite d'une suite de rationnels, nous pouvons nous donner une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite x . Par continuité de f en x et d'après la caractérisation séquentielle de la

continuité : $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n)$. Enfin : $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) \stackrel{4)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda r_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lambda x$. ■

1.4 OPÉRATIONS SUR LA CONTINUITÉ

Théorème (Opérations sur la continuité)

(i) **Somme, produit...** : La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point ; de même pour le produit. L'inverse d'une fonction continue en un point **non nulle en ce point** est continue en ce point. Idem pour les continuités sur un intervalle et à gauche/à droite.

(ii) **Composition** : Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

- **En un point** : Soit $a \in I$. Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .
- **Sur une réunion finie d'intervalles** : Si f est continue sur I et g continue sur J , alors $g \circ f$ l'est sur I .

Démonstration Conséquence immédiate du théorème sur les opérations sur les limites. ■

 **En pratique** Remarque importante : pour montrer la continuité d'une composée $g \circ f$, ne vous contentez pas d'un vague « C'est continu par composition ». Mettez en évidence les domaines I et J et suivez scrupuleusement l'énoncé du résultat ci-dessus.

Exemple La fonction $x \mapsto \left[\ln \left(x^2 + e^{\frac{1}{x}} \right) \right]^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

En effet

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$), la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$; par somme, $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; et $x \mapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; par composition $x \mapsto \ln \left(x^2 + e^{\frac{1}{x}} \right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Enfin la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$; on en déduit le résultat voulu au moyen d'une dernière composition.

2 LES GRANDS THÉORÈMES

C'est triste, mais le programme stipule que vous n'êtes pas obligés de savoir refaire les démonstrations des trois théorèmes présentés dans ce paragraphe. Je vous conseille néanmoins de les travailler. Tout de même, l'*algorithme de dichotomie* présenté plus bas est au programme et doit être bien compris.

Le résultat suivant formalise un type de raisonnement que nous avons déjà souvent pratiqué.

Lemme Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite $\sup \mathcal{A}$, la borne supérieure étant prise dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

- Supposons d'abord que $\sup \mathcal{A} = \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque n n'est pas un majorant de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ contient au moins un élément $a_n \geq n$. D'après le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ comme voulu.
- Supposons à présent que $s = \sup \mathcal{A} \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $s - \frac{1}{2^n}$ n'est pas un majorant de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ contient au moins un élément $a_n \geq s - \frac{1}{2^n}$. Comme par ailleurs la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par s , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ d'après le théorème des gendarmes. ■

2.1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

La définition suivante n'est qu'un rappel — plus de détails dans le chapitre « Relations d'ordre ».

Définition (Intervalle de $\mathbb{R}$) On appelle *intervalle* (de $\mathbb{R}$) toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y, t \in \mathbb{R}, \quad \left(x \in I \text{ et } y \in I \text{ et } x \leq t \leq y \right) \implies t \in I.$$

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI)

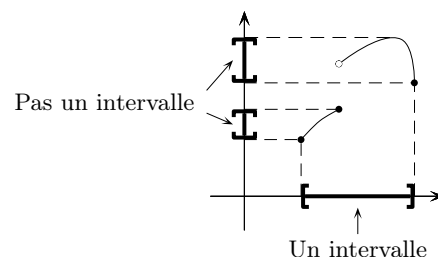
(i) Ici, I est un **INTERVALLE** et on fixe $a, b \in I$. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b (**non unique en général**) tel que $y = f(x)$.

Autre version du théorème :

(ii) L'image d'un **INTERVALLE** par une application continue est un **INTERVALLE**.

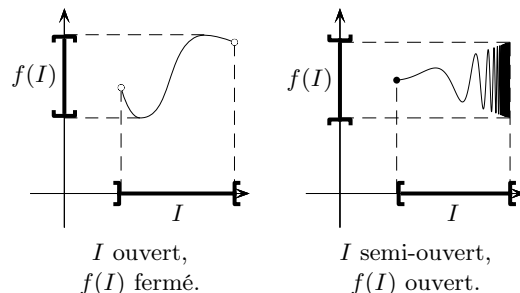
☺ ☺ ☺ **Explication**

Dessinez n'importe quelle fonction continue sur un intervalle, l'assertion (ii) vous paraîtra aussitôt claire. Il suffit d'un point de discontinuité pour qu'elle soit fausse, comme on le voit bien que la figure ci-contre.



××× Attention !

L'assertion (ii) affirme que si I est un intervalle et si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors $f(I)$ est un intervalle. Elle ne dit pas que I et $f(I)$ sont nécessairement deux intervalles de même nature. Par exemple, I peut être ouvert et $f(I)$ un segment ; ou bien I peut être semi-ouvert et $f(I)$ ouvert ; ou bien...



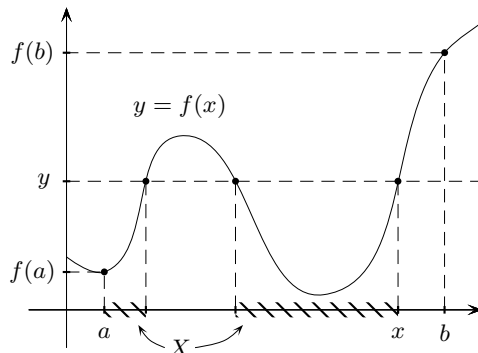
Démonstration

- Commençons par montrer que l'assertion (i) implique l'assertion (ii). Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle. Montrons que $f(I)$ est un intervalle. Soient $u, v \in f(I)$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $u \leq y \leq v$. Il s'agit de montrer que $y \in f(I)$. Ce qui est sûr, c'est que $u = f(a)$ et $v = f(b)$ pour certains $a, b \in I$. D'après (i), du coup, $y = f(x)$ pour un certain x compris entre a et b . En particulier $x \in I$ car I est un intervalle, et enfin $y = f(x) \in f(I)$.
- Démontrons maintenant (i). Pour simplifier, on suppose $a \leq b$ et $f(a) \leq y \leq f(b)$ — raisonnement analogue dans les autres cas. On note X l'ensemble $\{t \in [a, b] / f(t) \leq y\}$.

1) Comme $f(a) \leq y$, $a \in X$ et donc X est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Par ailleurs X est majorée par b . La propriété de la borne supérieure nous garantit donc l'existence de $\sup X$, que nous notons x . Nous allons prouver l'égalité $y = f(x)$ en prouvant successivement que $f(x) \leq y$ et $f(x) \geq y$. La figure ci-contre illustre le bien-fondé de cette démarche.

2) D'après un lemme montré plus haut, x est la limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X . Comme $f(x_n) \leq y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la caractérisation séquentielle de la continuité montre que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq y$.

3) Si $x = b$, $f(x) \leq y \leq f(b) = f(x)$ donc $y = f(x)$ comme voulu. Supposons donc $x < b$. Pour tout n assez grand, on peut alors dire que $x + \frac{1}{n} \in [a, b]$, mais par ailleurs $x + \frac{1}{n} \notin X$. Pour de tels n , $f\left(x + \frac{1}{n}\right) > y$, donc après passage à la limite et utilisation de la continuité de f en x , $f(x) \geq y$. ■



🐞🐞🐞 **Explication** On aurait aussi pu prouver le TVI par *dichotomie*. La dichotomie repose sur le principe suivant, qui figure explicitement au programme de MPSI : on part d'un intervalle, on le coupe en deux, on conserve l'une de ses moitiés et on rejette l'autre, puis on recommence tout ça un nombre infini de fois. « A la fin » — avec de gros guillemets — l'intervalle a complètement fondu et il ne reste plus qu'un point. Bien sûr, une grande question se pose : comment choisit-on la moitié d'intervalle qu'on conserve ? Pas au hasard en tout cas ! Tout dépend de ce que l'on veut faire. Nous avons vu un premier exemple de dichotomie quand nous avons démontré le théorème de Bolzano-Weierstrass. Qu'en est-il à présent dans le cas du TVI ?

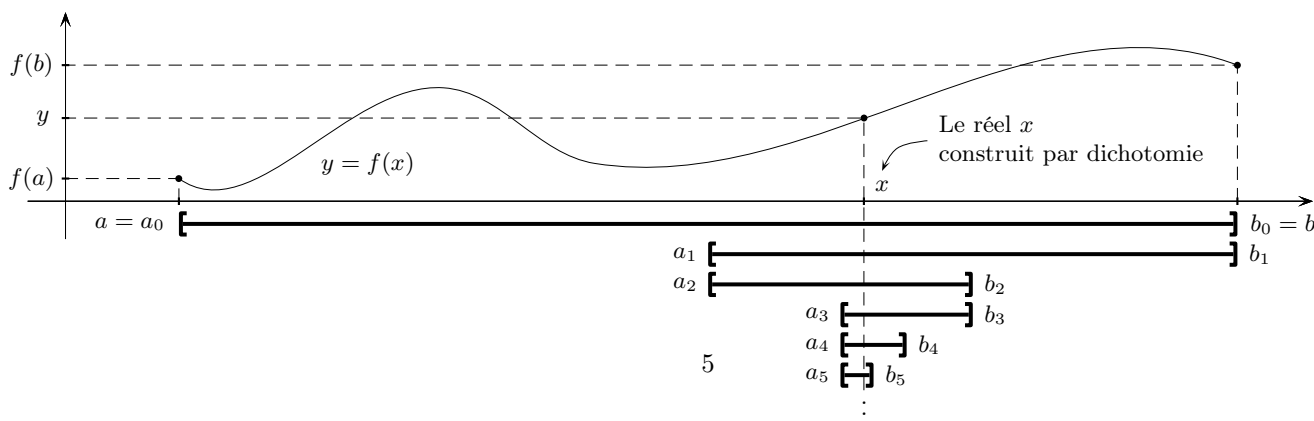
Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas où $a \leq b$ et $f(a) \leq f(b)$ et posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. A partir de l'intervalle $[a_0, b_0] = [a, b]$, nous allons construire par récurrence de nouveaux intervalles plus petits $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$. Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on a déjà construit des réels $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ pour lesquels :

- 1) $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0 = b$;
- 2) $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$;
- 3) $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(a_k) \leq y \leq f(b_k)$.

On définit au rang $(n+1)$ les réels a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et} & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq y \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{et} & b_{n+1} = b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < y. \end{cases}$$

Il reste alors à vérifier, pour achever la construction par récurrence, que a_{n+1} et b_{n+1} vérifient les propriétés 1), 2) et 3) au rang $(n+1)$ — ce que nous ne ferons pas ici. Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construites sont alors adjacentes d'après 1) et 2), donc possèdent une limite commune $x \in [a, b]$. Or si nous faisons tendre n vers ∞ dans 3), la caractérisation séquentielle de la continuité montre que $f(x) \leq y \leq f(x)$, i.e. que $y = f(x)$. Fin de la preuve du TVI par dichotomie.



Exemple L'équation $e^{-x} = x$ d'inconnue $x \in]0, 1[$ possède une solution.

En effet La fonction $f : x \mapsto e^{-x} - x$ est continue sur $[0, 1]$ et $f(1) = \frac{1}{e} - 1 \leq 0 \leq 1 = f(0)$. Du coup $f(x) = 0$ pour un certain $x \in [0, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Et évidemment, $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

Corollaire (Le fameux corollaire du TVI) Ici, I est un **INTERVALLE**. Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$.

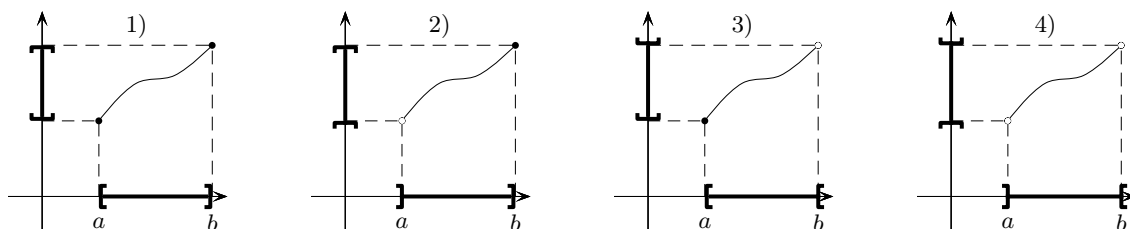
- Si f est strictement croissante sur I :

- 1) et si $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$;
- 2) et si $I =]a, b]$, alors $f(I) =]\lim_{a+} f, f(b)]$;
- 3) et si $I = [a, b[$, alors $f(I) = [f(a), \lim_{b-} f[$;
- 4) et si $I =]a, b[$, alors $f(I) =]\lim_{a+} f, \lim_{b-} f[$.

- Si f est strictement décroissante sur I :

- 1) et si $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(b), f(a)]$;
- 2) et si $I =]a, b]$, alors $f(I) = [f(b), \lim_{a+} f[$;
- 3) et si $I = [a, b[$, alors $f(I) =]\lim_{b-} f, f(a)]$;
- 4) et si $I =]a, b[$, alors $f(I) =]\lim_{b-} f, \lim_{a+} f[$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** En principe ce résultat est très intuitif, mais au cas où, illustrons-le de quelques figures dans le cas où f est strictement croissante.



Démonstration Contentons-nous de travailler dans le cas où $I = [a, b]$ et où f est strictement croissante sur l'intervalle I . Puisque f est continue sur I , le théorème des valeurs intermédiaires affirme que $f(I)$ est un intervalle.

Nous savons, en vertu du théorème de la limite monotone, que $\lim_{a+} f = \inf f([a, b[)$ et que $\lim_{b-} f = \sup f(]a, b])$.

Or f est continue en a , donc $\inf f(I) = \lim_{a+} f = f(a)$. Comme $f(a) \in f(I)$, $f(I)$ est l'un des intervalles suivants :

$[f(a), \lim_{b-} f]$ ou $[f(a), \lim_{b-} f[$. Mais peut-on avoir $\lim_{b-} f \in f(I)$? Si c'était le cas, il existerait alors $x \in I$ tel que $f(x) = \lim_{b-} f$, et aussitôt f serait constante égale à $\lim_{b-} f$ sur $[x, b[$, ce qui contredirait la **stricte** croissance de f .

Puisque donc $\lim_{b-} f \notin f(I)$, alors $f(I) \neq [f(a), \lim_{b-} f]$. Conclusion : $f(I) = [f(a), \lim_{b-} f[$. ■

🐞 🐞 🐞 **Explication** Nous avons déjà utilisé cent fois le corollaire du TVI, mais comprenons-nous bien quand nous l'utilisons à quel endroit précis chaque hypothèse est requise?

Traisons le cas d'une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante. Grâce à la seule stricte croissance de f , on peut déjà dire que f est injective sur $[a, b[$, et donc, naturellement, bijective de $[a, b[$ sur son image $f([a, b[)$. Dans ces conditions, si nous avons déjà la bijectivité, à quoi la continuité sert-elle? La continuité n'a en réalité qu'une utilité : associée de nouveau à la stricte croissance, garantir que $f([a, b]) = [f(a), \lim_{b-} f[$ — ce qui n'a rien d'évident. Sans la continuité, il se pourrait que $f([a, b])$ ait des trous — i.e. ne soit pas un intervalle — et qu'il ne suffise pas de connaître ses bornes pour le connaître entièrement.

2.2 IMAGE D'UN SEGMENT PAR UNE FONCTION CONTINUE

Théorème (Image d'un segment par une fonction continue)

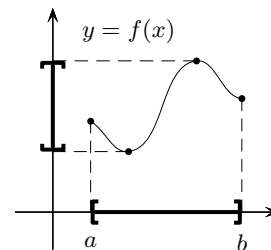
- (i) L'image d'un **SEGMENT** par une application continue est un **SEGMENT**.

Autre version (plus pratique) de ce théorème :

- (ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. possède un maximum et un minimum (**éventuellement atteints plusieurs fois**).

Explication

Le TVI montre que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Nous avons cependant remarqué que l'image d'un intervalle ouvert (resp. semi-ouvert) n'est pas nécessairement un intervalle ouvert (resp. semi-ouvert). Le présent théorème affirme qu'en tout cas un segment est toujours transformé en un segment par une application continue.



Attention ! Insistons : sur un intervalle qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée en général. Pensez à la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que $f([a, b])$ est un intervalle. Mais est-ce un segment ? Puisqu'un segment est un intervalle possédant un maximum et un minimum, il est clair que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Démontrons l'assertion (ii), et plus précisément seulement que f possède un maximum. Introduisons, en vertu de la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, la borne supérieure s de $f([a, b])$ — $s = \infty$ éventuellement. D'après un lemme montré plus haut appliqué à $f([a, b])$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telle qu'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$. En particulier, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, disons de limite $x \in [a, b]$. Par continuité de f , et d'après le théorème des suites extraites, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = s$. En particulier $s = f(x) \in \mathbb{R}$, donc $s < \infty$, donc f est majorée sur $[a, b]$. Mais l'égalité $s = f(x)$ montre aussi que s est mieux qu'une borne supérieure : $s = \max f([a, b])$. ■

Exemple Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

En effet Soient $T > 0$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T -périodique. Alors f est bornée sur $[0, T]$ d'après le théorème précédent, de sorte que pour un certain $K \in \mathbb{R}_+$: $\forall x \in [0, T], |f(x)| \leq K$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\frac{x}{T} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \leq \frac{x}{T}$, alors $0 \leq x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T < T$, et donc : $|f(x)| = \left| f\left(x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T\right) \right| \leq K$, ce qui montre bien que f est bornée sur tout $\mathbb{R}$.

2.3 THÉORÈME DE CONTINUITÉ D'UNE FONCTION RÉCIPROQUE

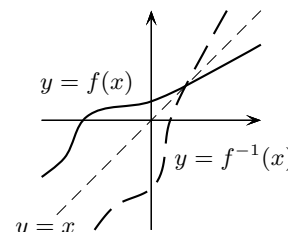
Nous avons déjà rencontré ce théorème dans notre chapitre sur les fonctions usuelles, en version light. En voici à présent la version intégrale, avec démonstration.

Théorème (Continuité d'une fonction réciproque) Ici, I est un **INTERVALLE**. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On pose $J = f(I)$.

- Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - f est strictement monotone sur I .
 - f injective sur I (donc bijective de I sur J).
- Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur J .

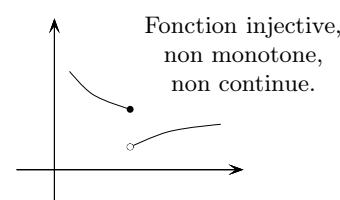
Explication

Ce théorème a une interprétation graphique très simple. Nous savons que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$. Si le graphe de f est continu, i.e. traçable sans qu'on ait besoin de lever la pointe du crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le serait-il pas ?



Attention !

Nous savions déjà qu'une fonction strictement monotone est injective, et nous savions aussi que sa réciproque, là où elle est définie, est strictement monotone de même sens de variation. Mais nous n'avions pas de réciproque au premier point. Nous en possédons une à présent, **dans le cas des fonctions continues en tout cas**. Notez bien que le moindre point de discontinuité ruine la validité du théorème, comme l'illustre la petite figure ci-contre.



Démonstration

- Commençons par montrer l'équivalence des assertions (i) et (ii). Nous savons déjà que (i) implique (ii), sans hypothèse de continuité d'ailleurs.

Réciproquement, faisons l'hypothèse que f est injective sur I et raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas strictement monotone. Alors f n'est ni croissante — donc il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) > f(y)$ — ni décroissante — donc il existe $x', y' \in I$ tels que $x' < y'$ et $f(x') < f(y')$.

Notons alors φ l'application $\begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto f(\lambda x + (1 - \lambda)x') - f(\lambda y + (1 - \lambda)y') \end{cases}$. Cette application est bien définie par *convexité* des intervalles — le segment joignant deux points quelconques d'un intervalle est intégralement contenu dans cet intervalle. De plus, φ est continue sur $[0, 1]$ en tant que composée. Or $\varphi(0) = f(x') - f(y') < 0$ et $\varphi(1) = f(x) - f(y) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme alors l'existence d'un $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$, i.e. $f(\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)x') = f(\lambda_0 y + (1 - \lambda_0)y')$.

Mais enfin, nous avons supposé que f est injective, donc $\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)x' = \lambda_0 y + (1 - \lambda_0)y'$, ou encore $\lambda_0(x - y) = (1 - \lambda_0)(y' - x')$. Dans cette égalité, le terme de gauche est strictement négatif et celui de droite strictement positif — contradiction. Nous avons bien montré que f est strictement monotone.

- Supposons à présent f strictement monotone sur I — par exemple strictement croissante, pour simplifier. Alors f réalise une bijection de I sur son image J et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est strictement croissante sur J . Tâchons de montrer que f^{-1} est continue sur J .

Soit $b \in J$. Supposons f définie au voisinage de b à gauche et montrons qu'alors f^{-1} est continue à gauche en b , i.e. que $\lim_{b^-} f^{-1} = f^{-1}(b)$ — on ferait une preuve identique à droite. En tout cas, le théorème de la limite monotone affirme l'existence de $\lim_{b^-} f^{-1}$, et de plus $\lim_{b^-} f^{-1} \leq f^{-1}(b)$. Remarquons alors que par croissance de f^{-1} , pour tous $y \in J \cap]-\infty, b[$ et $z \in J \cap [b, \infty[$:

$$f^{-1}(y) \leq \lim_{b^-} f^{-1} \leq f^{-1}(b) \leq f^{-1}(z).$$

Ces inégalités montrent que les éléments de $f^{-1}(J)$ sont tous soit inférieurs à $\lim_{b^-} f^{-1}$, soit supérieurs à $f^{-1}(b)$, de sorte que $\left] \lim_{b^-} f^{-1}, f^{-1}(b) \right[$ ne contient aucun d'entre eux. Pourtant $f^{-1}(J) = I$ est un **intervalle**, donc les mêmes inégalités prouvent que $\left] \lim_{b^-} f^{-1}, f^{-1}(b) \right[$ est inclus dans $f^{-1}(J)$. Une seule possibilité dès lors : l'intervalle $\left] \lim_{b^-} f^{-1}, f^{-1}(b) \right[$ est vide, i.e. $\lim_{b^-} f^{-1} = f^{-1}(b)$. ■

Exemple Comme nous l'avons déjà observé en début d'année, les fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs d'après le théorème de continuité d'une fonction réciproque.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $0^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même dont l'inverse, notée $\sqrt[n]{\cdot}$, est appelée *fonction racine n^{ème}*. Le théorème de continuité d'une fonction réciproque affirme que $\sqrt[n]{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Nous avons déjà construit une fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln x}{n}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(x^{\frac{1}{n}})^n = (e^{\frac{\ln x}{n}})^n = e^{n \times \frac{\ln x}{n}} = e^{\ln x} = x = (\sqrt[n]{x})^n$, donc $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ par injectivité de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ sont donc égales (sauf en 0 où la seconde n'est pas définie). Nous possédons ici deux définitions d'un même objet mathématique.

3 LIPSCHITZIANITÉ ET CONTINUITÉ UNIFORME

Définition (Lipschitzianité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *K-lipschitzienne* sur I si :

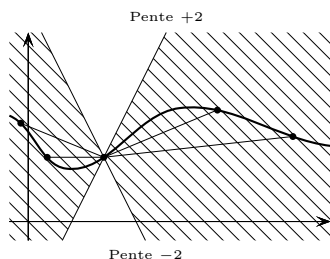
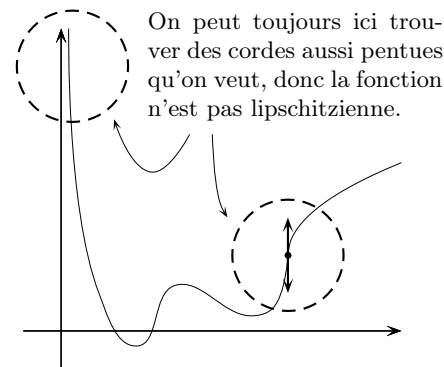
$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Explication

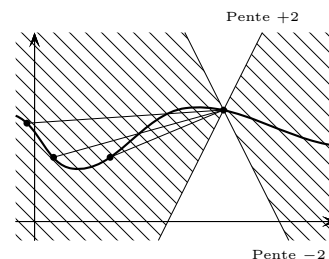
Bref, f est K -lipschitzienne sur I si : $\forall x, y \in I, \quad x \neq y \implies \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq K$.

Or le quotient $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est le coefficient directeur de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x et y . Dire que f est K -lipschitzienne sur I revient donc à dire que les pentes des cordes de son graphe sont majorées par K en valeur absolue. Plus généralement, dire que f est lipschitzienne revient à dire que les pentes des cordes de son graphe sont bornées.

Par exemple, la fonction représentée ci-contre à droite n'est pas lipschitzienne car il est facile de construire des cordes de pente aussi élevée qu'on le veut en valeur absolue dans les deux zones entourées en pointillés.



Les figures de gauche et de droite illustrent la 2-lipschitzieneté de la fonction représentée : les cordes issues de chaque point ont toutes un coefficient directeur compris entre -2 et 2 .



Exemple La fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ en vertu de l'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exemple La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1, \infty[$.

En effet Pour tous $x, y \in [1, \infty[$: $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x - y}{xy} \right| = \frac{|x - y|}{|x| \cdot |y|} \leq |x - y|$.

Définition (Continuité uniforme) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *uniformément continue* sur I si :

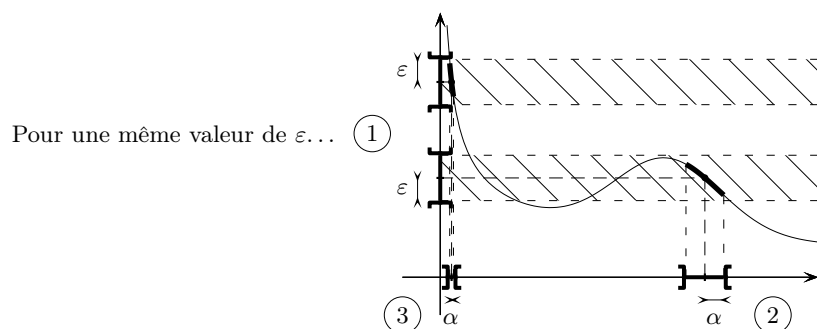
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Explication Dire que f est continue sur I , c'est dire que f est continue en tout point y de I , c'est-à-dire :

$$\forall y \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in I, \quad |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Avec la continuité, on se fixe donc un point $y \in I$ et un niveau ε , et on récupère un α . Si on change de y ou de ε , on change a priori la valeur de α .

Avec la continuité **uniforme**, on obtient un α en ayant seulement fixé un ε . Cet α est donc **valable pour tout point** $y \in I$. L'adjectif « uniforme » est précisément là pour signifier cette indépendance de α par rapport à y .



A cause de cette évanescence de α en 0, aucune valeur de α ne peut convenir **pour tout point**. Il n'y a donc pas continuité uniforme.

... mais plus on s'approche de 0, plus la pente est grande et plus les valeurs de α qu'on trouve sont petites.

... on arrive à trouver une valeur assez grande de α pour la continuité en ce point...

Théorème Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- (i) Si f est uniformément continue sur I , alors f est continue sur I .
- (ii) Si f est lipschitzienne sur I , alors f est uniformément continue sur I (et donc continue sur I).

Démonstration

- (i) Supposons f uniformément continue sur I et montrons que f est alors continue sur I . Il s'agit donc de montrer que f est continue en tout point de I . Soit $a \in I$ un tel point. On obtient la continuité de f en a en posant tout simplement « $y = a$ » dans la définition de la continuité uniforme de f sur I .
- (ii) Supposons f K -lipschitzienne sur I pour un certain $K > 0$. Nous voulons montrer que f est uniformément continue sur I . Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{K}$ et montrons que : $\forall x, y \in I, |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Pour tous $x, y \in I$ tels que $|x - y| < \alpha$: $|f(x) - f(y)| \stackrel{K\text{-lip.}}{\leq} K|x - y| < K\alpha = \varepsilon$. ■

Le théorème précédent n'admet pas de réciproque en général, sauf ci-dessous pour l'assertion (i) dans le cas d'un segment.

Théorème (Théorème de Heine) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Alors pour un certain $\varepsilon > 0$: $\forall \alpha > 0, \exists x, y \in [a, b] / |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons donc deux éléments $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
- La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant ainsi bornée entre a et b , elle possède une suite extraite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, de limite un certain réel $\ell \in [a, b]$.
- Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$, l'inégalité $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)}$ et le théorème des gendarmes montrent que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\varphi(n)} = \ell$.
- Pour conclure, passons l'inégalité $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$ à la limite en utilisant la continuité de f en ℓ : $0 = |f(\ell) - f(\ell)| \geq \varepsilon > 0$. Contradiction. ■

*** **Attention !** Le théorème de Heine est vrai uniquement parce qu'il y est question de **segments**. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ mais elle n'y est pas uniformément continue.

En effet Il s'agit de montrer que : $\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x, y \in]0, 1] / |x - y| < \alpha \text{ et } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \geq \varepsilon$.

Posons $\varepsilon = 1$. Soit ensuite $\alpha > 0$ quelconque. Posons $x = \min \left\{ 2\alpha, 1 \right\}$ et $y = \frac{x}{2}$. Il est alors vrai que $x, y \in]0, 1]$ et en outre : $|x - y| = \left| x - \frac{x}{2} \right| = \frac{x}{2} < \alpha$ et $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \right| = \frac{1}{x} \geq 1 = \varepsilon$. C'est terminé.

4 EXTENSION AU CAS DES FONCTIONS COMPLEXES

Nous allons brièvement étendre les résultats que nous avons obtenu pour les fonctions réelles aux fonctions complexes. Les notions de continuité en un point, sur une réunion finie d'intervalles et en un point à gauche/à droite sont définies dans le cas des fonctions complexes de la même façon que dans celui des fonctions réelles — à ceci près que $|\cdot|$ désigne la fonction module et non la fonction valeur absolue. On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la caractérisation de la limite d'une fonction complexe en un point à l'aide de ses parties réelle et imaginaire.

Théorème (Caractérisation de la continuité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application et $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

La caractérisation séquentielle de la continuité est maintenue. De même les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les fonctions continues donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel.

Les grands théorèmes sur la continuité — en premier lieu, le théorème des valeurs intermédiaires — sont faux pour les fonctions complexes. Par exemple, l'image du segment $[0, 2\pi]$ par la fonction continue $t \mapsto e^{it}$ est le cercle trigonométrique, qui n'est pas un intervalle.