

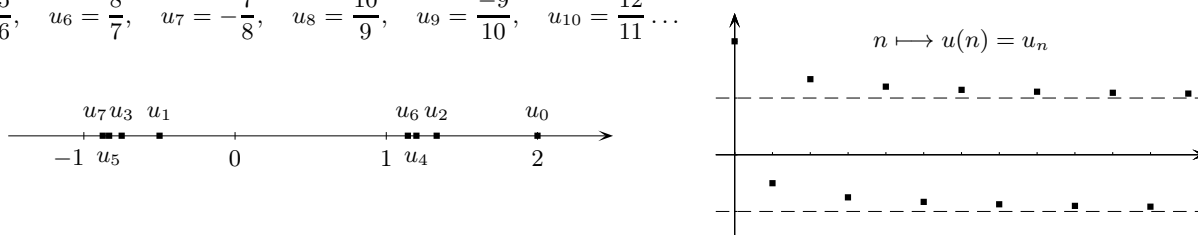
LIMITE D'UNE SUITE

1 INTRODUCTION AUX SUITES RÉELLES

Définition (Suite réelle) On appelle *suite réelle* toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Dans la plupart des cas, la suite u est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$.

Explication

- Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on appelle aussi *suite réelle* toute application u de $\llbracket n_0, \infty \llbracket$ dans $\mathbb{R}$, notée $(u_n)_{n \in \llbracket n_0, \infty \llbracket}$ ou $(u_n)_{n \geq n_0}$. Par commodité, les définitions et théorèmes de ce chapitre seront énoncés seulement pour les suites définies sur tout $\mathbb{N}$.
- Avec cette définition, l'ensemble des suites réelles est $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- On peut représenter graphiquement les suites de plusieurs façons. Prenons l'exemple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. Premières valeurs : $u_0 = 2, u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = \frac{4}{3}, u_3 = -\frac{3}{4}, u_4 = \frac{6}{5}, u_5 = -\frac{5}{6}, u_6 = \frac{8}{7}, u_7 = -\frac{7}{8}, u_8 = \frac{10}{9}, u_9 = -\frac{9}{10}, u_{10} = \frac{12}{11} \dots$



Définition (Vocabulaire usuel sur les suites) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *constante* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *stationnaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$: $u_n = \lambda$.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *majorée* si $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq M$. Un tel M est appelé un *majorant* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit aussi que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *majorée par M* ou que M *major* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Cela revient à dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq K$.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *positive* si elle est minorée par 0, i.e. si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.
- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *croissante* (resp. *strictement croissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).

On dispose bien sûr de définitions analogues des suites *minorées*, *négatives*, *décroissantes* et *strictement décroissantes*.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Attention !

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède **jamais un seul majorant** quand elle en possède un, car tout réel plus grand qu'un majorant est aussi un majorant. Raisonement analogue pour les minorants.
- « Minorée » n'est pas le contraire de « majorée », « négative » n'est pas le contraire de « positive », « décroissante » n'est pas le contraire de « croissante ». Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante, ni positive ni négative.

En pratique Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, deux méthodes courantes :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- SI $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. Cette méthode est intéressante surtout lorsque la définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne fait intervenir que des produits et des quotients et qu'on peut espérer des simplifications entre le numérateur et le dénominateur.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \frac{2^n}{n+1}$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

En effet Les deux méthodes de différence et quotient sont envisageables ici. Au choix, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- **Différence** : $u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)(n+2)} (2(n+1) - (n+2)) = \frac{2^n n}{(n+1)(n+2)} \geq 0$.
- **Quotient** : $u_n > 0$ ET $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{(n+2)+n}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2} \geq 1$.

Définition (Suite extraite) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On appelle *suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$* toute suite réelle de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ pour une certaine application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** L'application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés nouveaux indices. Par exemple, si $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \dots)$, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \dots)$.

Exemple

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle de terme général $u_n = \sqrt{n}$. Les suites $\left(\sqrt{2^n + 4n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, associées respectivement aux applications $n \mapsto 2^n + 4n$ et $n \mapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite réelle de terme général $(-1)^n$.

✖ ✖ ✖ **Attention !** Remarque authentiquement essentielle ! Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2k} dans la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)} = u_{2k+2}$ **et non pas** u_{2n+1} ; de même, le terme qui vient après u_{2k+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3}$ **et non pas** u_{2k+2} .

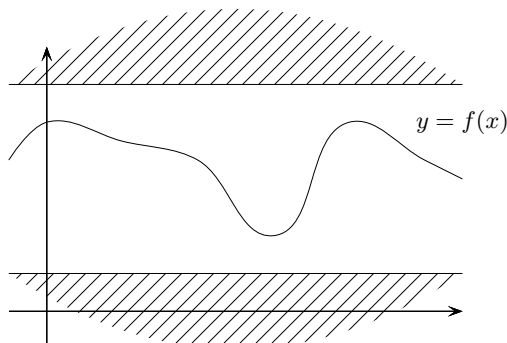
Définition (Propriété vraie à partir d'un certain rang) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de propositions portant sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *vérifie la propriété $\mathcal{P}$ à partir d'un certain rang* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Ce qui nous intéresse dans une suite, en général, ce ne sont pas ses premiers termes mais plutôt son comportement « à l'infini ». Ainsi, si tous les termes d'une suite sont majorés par 1 sauf les 30 premiers, on a bien envie de considérer que les 30 premiers termes ne comptent pas et que grosso modo la suite est majorée par 1. On dira simplement que la suite est majorée par 1 *à partir d'un certain rang*.

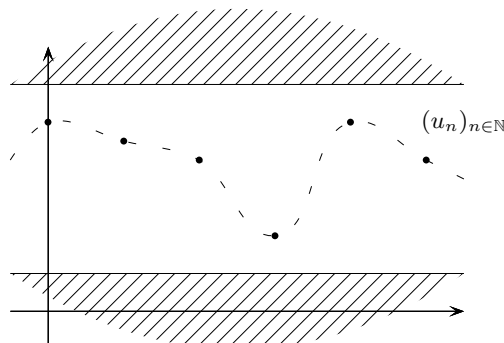
🐞 🐞 🐞 **Explication** La distinction présentée ci-dessous est la base de la base. Il est impensable que vous ne la maîtrisiez pas.

- **Suites définies explicitement** : On peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *explicitement* par une expression de la forme « $u_n = f(n)$ » où f est une fonction. Une telle définition présente un **énorme avantage** : pour calculer u_{1000} , pas besoin de calculer $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{999}$, on peut calculer directement $u_{1000} = f(1000)$.

De nombreuses propriétés de f se transmettent telles quelles à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui n'est après tout que la restriction de f à $\mathbb{N}$: monotonie, signe et caractère majoré/minoré/borné.



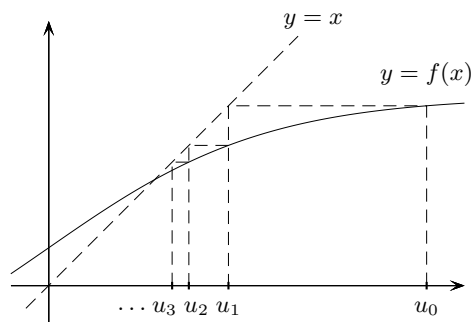
f est bornée...



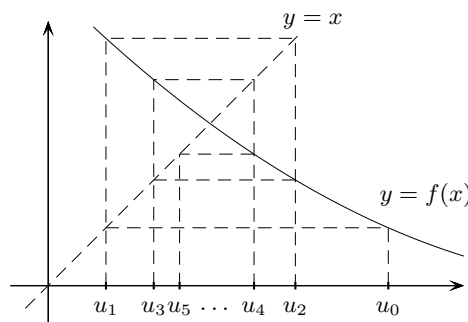
...donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

- **Suites définies par une relation de récurrence** : On peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *par récurrence* par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ » où f est une fonction. Une telle définition présente un **énorme inconvénient** : pour calculer u_{1000} , on est obligé de calculer les uns après les autres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{999}, u_{1000}$ — impossible d'obtenir u_{1000} directement.

Attention hélas ! Les propriétés de f ne se transmettent pas toutes telles quelles à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le cas d'une définition par récurrence. Les monotonies éventuelles de f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'ont en général aucun rapport.



f est croissante mais $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.



f est décroissante mais $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est même pas monotone.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Les exercices auxquels on vous a habitués jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que, pour définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, il suffit de se donner une fonction f quelconque et un u_0 dans le domaine de définition de f , et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Illusion !

Notons par exemple f la fonction $x \mapsto 1 + \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty, 1]$ et posons $u_0 = 0$. Comme $f(u_0) = f(0) = 2$, on peut poser $u_1 = 2$. Mais ensuite $f(2)$? Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ? La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ici pas définie. Quelle différence entre les exemples qui marchent et ceux qui ne marchent pas ?

Définition (Partie stable par une application) Soient E un ensemble, $f : E \rightarrow E$ une application et D une partie de E . On dit que D est *stable par f* si $f(D) \subseteq D$, i.e. si pour tout $x \in D$: $f(x) \in D$.

Théorème (Existence de suites définies par récurrence) Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans D — bref : D est stable par f .

Pour tout $\delta \in D$, il existe une et une seule suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \delta$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Cette suite est à valeurs dans D .

Démonstration Fixons $\delta \in D$.

- **Existence** : Comme $f(D) \subseteq D$, on peut composer f avec elle-même autant de fois qu'on veut. Posons $u_0 = \delta \in D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f^n(u_0) \in D$, où $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois). Alors comme voulu, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) = f(f^n(u_0)) = f^{n+1}(u_0) = u_{n+1}$.
- **Unicité** : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_0 = u'_0 = \delta$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u'_{n+1} = f(u'_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que $u_n = u'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 1) **Initialisation** : Par hypothèse, $u_0 = u'_0 = \delta$.
 - 2) **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = u'_n$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(u'_n) = u'_{n+1}$. ■

Exemple Il existe une et une seule suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \ln(1 + \sqrt{u_n})$.

En effet L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + \sqrt{x} \geq 1$ et donc $\ln(1 + \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$. Comme $u_0 = 2 \in \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ proposée est bien définie et on peut même ajouter qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, i.e. que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.

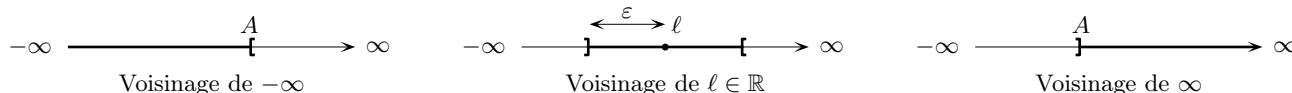
2 LIMITE D'UNE SUITE RÉELLE DANS $\bar{\mathbb{R}}$

La notion de *voisinage*, issue d'une partie des mathématiques appelée « topologie », n'est pas au programme de MPSI mais elle facilite grandement la compréhension des limites. Je ne vous en donne cependant ci-dessous qu'une **définition simplifiée**.

Définition (Voisinage dans $\mathbb{R}$) Soit $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage de ℓ (dans $\mathbb{R}$)* :

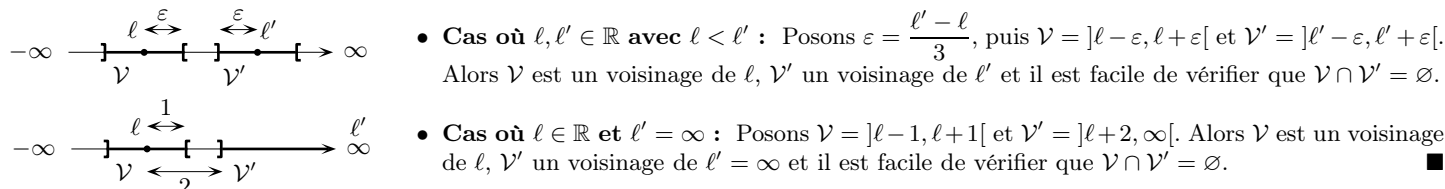
- si $\ell \in \mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$;
- si $\ell = \infty$, tout intervalle de la forme $]A, \infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- si $\ell = -\infty$, tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** L'idée, c'est qu'un voisinage de ℓ contient tous les réels à proximité immédiate de ℓ .



Théorème (On peut distinguer deux points par leurs voisinages) Soient $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $\ell \neq \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}'$ de ℓ' pour lesquels $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$.

Démonstration Traitons seulement deux cas caractéristiques : les autres se traitent de la même manière.



La définition suivante est l'objet central de ce chapitre.

Définition (Limite d'une suite) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

• **(Définition générale)** On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, i.e. si :

pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ , u_n appartient à $\mathcal{V}$ à partir d'un certain rang.

• **(Cas d'une limite finie)** Lorsque $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

ou bien de manière plus concise, si : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$

• **(Cas de la limite ∞)** On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ∞ pour limite si :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n > A,$$

ou bien de manière plus concise, si : $\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A.$

• **(Cas de la limite $-\infty$)** On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $-\infty$ pour limite si :

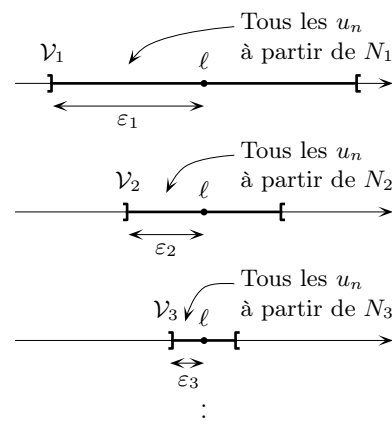
$$\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n < A,$$

ou bien de manière plus concise, si : $\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geq N, \quad u_n < A.$

⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** Dans ces définitions, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne doivent être permutés sous aucun prétexte. On peut montrer en revanche que les inégalités strictes « $|u_n - \ell| < \varepsilon$ », « $u_n > A$ » et « $u_n < A$ » peuvent être remplacées si on le souhaite par des inégalités larges « $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ », « $u_n \geq A$ » et « $u_n \leq A$ ».

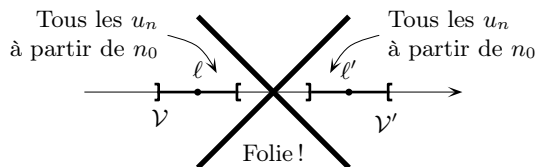
🐞 🐞 🐞 **Explication** La définition ci-dessus de la limite d'une suite, un peu obscure au premier abord, satisfait en réalité l'intuition que nous avons de cette notion ; c'est ce que nous allons montrer à présent. Donnons-nous donc un réel ℓ — raisonnement analogue si $\ell = \pm\infty$ — et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite ℓ au sens de la définition précédente.

- Partons d'un voisinage $\mathcal{V}_1 =]\ell - \varepsilon_1, \ell + \varepsilon_1[$ de ℓ . Par définition de la limite, les u_n sont piégés dans $\mathcal{V}_1$ à partir d'un certain rang N_1 . Cela ne nous donne aucun renseignement sur les u_n pour $n < N_1$ — ce qui n'est pas gênant puisque nous faisons tendre n vers ∞ — mais nous sommes certains que les u_n pour $n \geq N_1$ ne s'éloignent pas trop de ℓ .
- Ce travail avec $\mathcal{V}_1$ ne suffit bien sûr pas à nous convaincre que ℓ est limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: après tout, le fait que les u_n soient dans $\mathcal{V}_1$ pour $n \geq N_1$ ne signifie pas qu'ils s'approchent de ℓ . Mais **L'ESSENTIEL** de la définition de la limite, c'est qu'il y soit écrit « pour **tout** voisinage... ». Les u_n sont ainsi voisins de ℓ aussi près que l'on veut.



Théorème (Unicité de la limite) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite, celle-ci est unique, notée $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Pour tout $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, la relation $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ se note souvent $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

Démonstration On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limites $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \bar{\mathbb{R}}$. Il s'agit de montrer que $\ell = \ell'$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}'$ de ℓ' tels que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$. Or, par hypothèse, $u_n \in \mathcal{V}$ à partir d'un certain rang N et $u_n \in \mathcal{V}'$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max\{N, N'\}$. Alors $u_{n_0} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$ — contradiction ! ■



☺ ☺ ☺ **Explication** Il y a une idée importante dans cette preuve que nous allons retrouver tout au long de ce chapitre. Supposons qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_1$ soit vraie à partir d'un rang N_1 , qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_2$ soit vraie à partir d'un rang N_2 ... et enfin qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_k$ soit vraie à partir d'un rang N_k . Alors à partir du rang $n_0 = \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$, les propriétés $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$ sont toutes vraies à la fois.

Définition (Convergence et divergence) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* ou qu'elle *converge* si elle possède une limite finie. On dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

× × × Attention !

« Converger » n'est pas « avoir une limite » mais « avoir une limite finie ».
« Diverger » n'est pas « avoir $\pm\infty$ pour limite », mais éventuellement « ne pas avoir de limite ».

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

Théorème (Convergence et caractère borné) Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, disons de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon = 1$, la définition de la limite affirme que l'inégalité $|u_n - \ell| < 1$ est vraie à partir d'un certain rang N . Ainsi pour tout $n \geq N$:

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1 \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire.}$$

Posons $K = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\}$. Clairement : $|u_0| \leq K, |u_1| \leq K, \dots, |u_{N-1}| \leq K$, et bien sûr $|u_n| \leq K$ pour tout $n \geq N$, donc en fait $|u_n| \leq K$ pour **tout** $n \in \mathbb{N}$. Bef : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. ■

× × × Attention !

- La réciproque est fautive : toute suite bornée n'est pas convergente. Pensez simplement à la suite de terme général $(-1)^n$.
- Une suite non bornée n'admet pas forcément ∞ ou $-\infty$ pour limite. La suite de terme général $(-1)^n n$, par exemple, n'est pas bornée et n'a pas de limite — ses termes d'indice pair s'approchent de ∞ et ses termes d'indice impair de $-\infty$.

🔧 🔧 🔧 **En pratique** La manipulation des définitions de la limite n'est pas trop difficile si l'on veut bien se conformer aux recommandations qui suivent. Imprégnez-vous-en comme jamais : sans elles vous serez vite perdus.

- Un point technique tout d'abord, sur trois exemples. Fixons $\varepsilon > 0$ et $A > 0$.

- A partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Comme $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$, l'inégalité $\frac{1}{n} < \varepsilon$ est vraie à partir du rang $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.
- A partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$? Cette inégalité est vraie si et seulement si $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, ou encore $n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$. L'inégalité $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ est donc vraie à partir du rang $\max\left\{0, \left\lfloor -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor + 1\right\}$. Pourquoi ce « max » ? Parce que les entiers que nous appelons ici « rangs » se doivent d'être positifs.
- A partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > A$? Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor + 1$.

- Expliquons à présent de quelle manière on peut montrer un résultat de la forme « $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ » en revenant à la définition. Supposons dans un premier temps que $\ell \in \mathbb{R}$. Pour montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$, on commence évidemment sans réfléchir par : « Soit $\varepsilon > 0$. » Ensuite, pour trouver un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| < \varepsilon$, on essaie de **MAJORER** $|u_n - \ell|$ **EN RESPECTANT DEUX RÈGLES** :

- 1) La majoration obtenue doit **TENDRE VERS 0 QUAND n TEND VERS ∞** . Sans cela nous ne pourrions pas trouver un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| < \varepsilon$ quand ε est trop petit.
- 2) La majoration obtenue doit **ÊTRE UNE QUANTITÉ SIMPLE** — mais simple au regard de quoi ? Simple **VIS-À-VIS DE LA RECHERCHE DU RANG N** . D'où l'intérêt, dans un cas concret, des exemples techniques qui précèdent. Si on a obtenu la majoration « $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{n}$ », on pourra poser $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Si c'est « $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}$ », on posera $N = \max \left\{ 0, \left\lceil -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil + 1 \right\}$.

- Dans le cas où $\ell = \infty$, on s'adapte. Pour montrer que : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n > A$, on commence évidemment sans réfléchir par : « Soit $A > 0$. » Ensuite, pour trouver un rang N à partir duquel $u_n > A$, on essaie de **MINORER** u_n **EN RESPECTANT DEUX RÈGLES** :

- 1) La minoration obtenue doit **TENDRE VERS ∞** — et non plus 0 — **QUAND n TEND VERS ∞** .
- 2) La minoration obtenue doit **ÊTRE UNE QUANTITÉ SIMPLE VIS-À-VIS DE LA RECHERCHE DU RANG N** . Si on a obtenu la minoration « $u_n \geq n^2$ », on pourra poser $N = \lceil \sqrt{A} \rceil + 1$.

Exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 2} = 0$.

En effet Nous devons montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \left| \frac{n \sin n}{n^2 + 2} \right| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, majorons : $\left| \frac{n \sin n}{n^2 + 2} \right| = \frac{n |\sin n|}{n^2 + 2} \leq \frac{n}{n^2 + 2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

On majore en **simplifiant** et en vérifiant que ce par quoi on majore **tend toujours vers 0**.

On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Posons donc $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. A partir de N , l'inégalité $\frac{1}{n} < \varepsilon$ est vraie, donc a fortiori l'inégalité $\left| \frac{n \sin n}{n^2 + 2} \right| < \varepsilon$ aussi.

Exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + (-1)^n n) = \infty$.

En effet Nous devons montrer que : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, n^2 + (-1)^n n > A$.

Soit $A > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, minorons : $n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n = n(n-1) \geq (n-1)^2$.

On minore en **simplifiant** et en vérifiant que ce par quoi on minore **tend toujours vers ∞** .

On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang N cherché.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n-1)^2 > A \iff n > \sqrt{A} + 1$. Posons donc $N = \lceil \sqrt{A} \rceil + 2$. A partir de N , l'inégalité $(n-1)^2 > A$ est vraie, donc a fortiori l'inégalité $n^2 + (-1)^n n > A$ aussi.

3 MANIPULATIONS DES LIMITES

3.1 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les tableaux de ce paragraphe, sous l'hypothèse que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ **EXISTENT**, racontent ce qu'il en est de $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n)$ (somme), $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n)$ (produit) et $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n)$ (multiplication par un réel), ainsi que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n}$ (inverse) lorsque $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Dans ces tableaux, le symbole ??? ne signifie pas une absence de limite mais une *indétermination*. Nous reviendrons plus loin en détail sur la signification précise de ce je-ne-sais-pas.

SOMME	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	ℓ	ℓ ou ∞	ℓ ou $-\infty$	∞
	$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	ℓ'	∞	$-\infty$	$-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	∞	$-\infty$	???

PRODUIT	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou ∞	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou ∞	$\ell < 0$ ou $-\infty$	∞ ou $-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	ℓ'	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	0
	$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n)$	$\ell \ell'$	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	???

MULTIPLICATION PAR UN RÉEL		$\lambda > 0$			$\lambda = 0$	$\lambda < 0$		
	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	∞	ℓ	$-\infty$	peu importe	∞	ℓ	$-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n)$	∞	$\lambda \ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda \ell$	∞

INVERSE				$u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$u_n < 0$ à partir d'un certain rang	sinon
	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$\ell \neq 0$	∞ ou $-\infty$	0	0	0
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	∞	$-\infty$	???

🐇 🐇 🐇 **Explication** On pourrait bien sûr contruire un tableau « quotient » à partir des tableaux « produit » et « inverse ». On y découvrirait de nouveaux cas d'indétermination : $\frac{1}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Mais qu'est-ce au fond qu'une *forme indéterminée* ? C'est une « forme à déterminer ». Dans les tableaux précédents, le symbole ??? signifie qu'en effectuant une opération $\infty - \infty$ ou $0 \times \infty$, on peut tomber sur **n'importe quel résultat**, impossible à prédire dans le tableau.

• **Cas de la forme indéterminée $\infty - \infty$:**

- 1) On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \ell) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} -n = -\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n + \ell) - n) = \ell$.
- 2) On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} -n = -\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n) = \infty$.
- 3) On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + (-1)^n) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$,
mais $(n + (-1)^n) - n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

• **Cas de la forme indéterminée $0 \times \infty$:**

- 1) On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ell}{n} \times n \right) = \ell$.
- 2) On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \times n^2 \right) = \infty$.
- 3) On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$,
mais $\frac{(-1)^n}{n} \times n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Démonstration Nous nous contentons de démontrer quelques-uns des résultats des tableaux précédents.

- **Somme de deux limites finies** : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\left| (u_n + v_n) - (\ell + \ell') \right| = \left| (u_n - \ell) + (v_n - \ell') \right| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Ici, **simplifier**, c'est faire apparaître les quantités $|u_n - \ell|$ et $|v_n - \ell'|$ de l'hypothèse.

On majore en **simplifiant** et en vérifiant que ce par quoi on majore **tend toujours vers 0**.

Or par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$\left| (u_n + v_n) - (\ell + \ell') \right| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- **Somme d'une limite finie et d'une limite ∞** : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang N , donc en particulier $u_n > \ell - 1$, et $v_n > A - \ell + 1$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$u_n + v_n > (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A.$$

- **Somme de deux limites ∞** : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$ à partir d'un certain rang N et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$u_n + v_n > A + 0 = A.$$

- **Produit de deux limites finies** : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après l'inégalité triangulaire :
$$|u_n v_n - \ell \ell'| = \left| (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell') \right| \leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'|.$$

Or par hypothèse $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, disons par K en valeur absolue. Ensuite, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2K}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)}$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2K} K + |\ell| \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- **Produit d'une limite finie strictement positive et d'une limite ∞** : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang N , donc en particulier $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$, et $v_n > \frac{2A}{\ell} > 0$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A.$$

- **Produit de deux limites ∞** : On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$ à partir d'un certain rang N et $v_n > 1$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$u_n + v_n > A \times 1 = A.$$

- **Inverse d'une limite finie non nulle** : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N et que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq N$:
$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|}.$$

Or par hypothèse $|u_n - \ell| < \min \left\{ \frac{|\ell|}{2}, \frac{\varepsilon |\ell|^2}{2} \right\}$ à partir d'un certain rang N' , donc en particulier d'après l'inégalité triangulaire :
$$\left| |u_n| - |\ell| \right| \leq |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}, \text{ d'où } |u_n| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$
 Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$.

Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|} < \frac{\frac{\varepsilon |\ell|^2}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

- **Inverse d'une limite ∞** : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N et que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$\left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

- **Inverse d'une limite nulle de suite strictement positive** : On suppose $u_n > 0$ à partir d'un certain rang N et que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Soit $A > 0$. Par hypothèse $|u_n| < \frac{1}{A}$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max \{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$:
$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A. \quad \blacksquare$$

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ — notion connue intuitivement, mais qui ne sera définie proprement que plus tard dans l'année.

Théorème (Composition à gauche par une fonction) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $\ell \in \bar{I}$, $L \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell, \text{ et si } \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = L, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = L.$$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$. **RÉSULTAT À CONNAÎTRE !**

En effet Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})}$. Or $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, donc par composition :
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, ou encore $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$. Pour finir, composer avec l'exponentielle.

✖✖✖ **Attention !** Ce n'est pas parce qu'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1$ que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1$. On peut résumer cela en disant que 1^∞ est une nouvelle forme indéterminée.

3.2 LIMITES DE SUITES EXTRAITES

Lemme Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) \geq n$.

Démonstration Par récurrence.

Initialisation : Comme $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, $\varphi(0) \geq 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\varphi(n) \geq n$. Alors par stricte croissance de φ : $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Mais $\varphi(n+1)$ est un entier, donc $\varphi(n+1) \geq n+1$. ■

Théorème (Théorème des suites extraites) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \ell$.
- (iii) Toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (iii) On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$. Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de ℓ . Alors $u_n \in \mathcal{V}$ à partir d'un certain rang N . Pour tout $n \geq N$, par croissance de φ et d'après le lemme précédent : $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$, et enfin $u_{\varphi(n)} \in \mathcal{V}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Evident, puisque $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \ell$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de ℓ . Alors $u_{2n} \in \mathcal{V}$ à partir d'un certain rang N et $u_{2n+1} \in \mathcal{V}$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max\{2N, 2N' + 1\}$ et donnons-nous $n \geq n_0$ quelconque.

- Si n est pair, disons $n = 2p$: $2p = n \geq n_0 \geq 2N$ donc $p \geq N$, et enfin $u_n = u_{2p} \in \mathcal{V}$.
- Si n est impair, disons $n = 2p+1$: $2p+1 = n \geq n_0 \geq 2N'+1$ donc $p \geq N'$, et enfin $u_n = u_{2p+1} \in \mathcal{V}$.

Dans les deux cas, $u_n \in \mathcal{V}$. ■

🔗🔗🔗 **En pratique** Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite **n'a pas de limite** : il suffit pour ce faire d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite — éventuellement pas de limite.

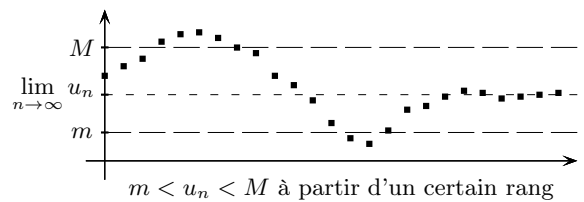
Exemple La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.

En effet Posons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = 1$ alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = -1 \neq 1$.

3.3 PASSAGE À LA LIMITE DANS LES INÉGALITÉS

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle possédant une limite et $m, M \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.
- (ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.



××× **Attention !** Résultats faux avec des inégalités **larges** ! Par exemple, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \leq 0$, mais $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration Prouvons seulement l'assertion (i). Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Si $\ell = -\infty$, tous les u_n sont dans le voisinage $] -\infty, M[$ de ℓ à partir d'un certain rang. Si au contraire $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $M - \ell > 0$ par hypothèse, tous les u_n sont tous dans le voisinage $]\ell - (M - \ell), \ell + (M - \ell)[\subseteq] -\infty, M[$ de ℓ à partir d'un certain rang. Dans les deux cas, $u_n < M$ à partir d'un certain rang. ■

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang, alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

××× **Attention !** Résultat faux avec des inégalités **strictes** ! Par exemple, $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Démonstration Par hypothèse, $v_n - u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) < 0$. Le théorème précédent affirme alors que $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang — contradiction. Conclusion : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) \geq 0$ et c'est fini. ■

4 THÉORÈMES D'EXISTENCE DE LIMITES POUR LES SUITES RÉELLES

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Dans les paragraphes qui précèdent, l'existence de certaines limites a été établie : somme, produit, suites extraites, etc. On omet généralement de voir ces résultats comme des théorèmes d'**existence** pour les voir seulement, en pratique, comme des théorèmes de **calcul**.

Les théorèmes qui suivent, au contraire, gagnent à être conçus comme de vrais théorèmes d'existence, même en pratique. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas la **valeur** d'une limite mais son **existence**. Même le théorème des gendarmes doit être envisagé sous cet angle : ce qui importe, c'est que la suite encadrée converge. Le théorème nous donne en plus la valeur de la limite, mais en réalité, sous réserve d'existence, cette valeur était accessible à partir du seul théorème de passage à la limite dans les inégalités larges.

4.1 THÉORÈME DES GENDARMES, THÉORÈMES DE MINORATION/MAJORATION

Théorème Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

- (i) **Théorème des gendarmes/de l'encadrement :**

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \ell$ et si $m_n \leq u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ **existe** et vaut ℓ .

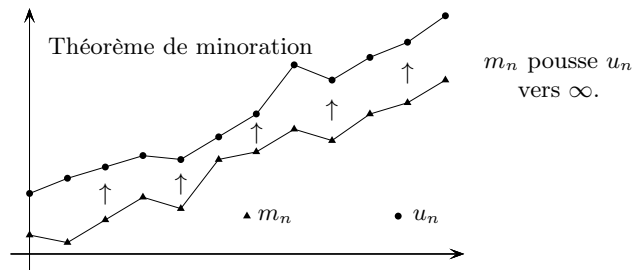
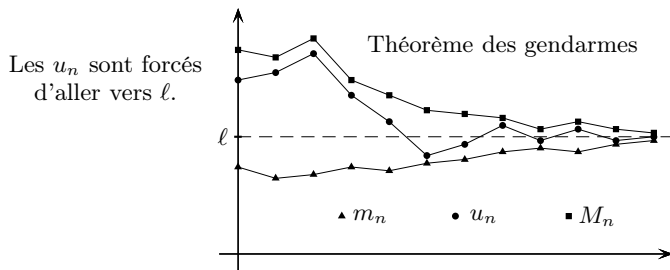
- (ii) **Théorème de minoration :**

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \infty$ et si $u_n \geq m_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ **existe** et vaut ∞ .

- (iii) **Théorème de majoration :**

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ **existe** et vaut $-\infty$.

Explication



Démonstration

- (i) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $m_n \leq u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang N , $m_n > \ell - \varepsilon$ à partir d'un certain rang N' et $M_n < \ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang N'' . Posons $n_0 = \max\{N, N', N''\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$: $\ell - \varepsilon < m_n \leq u_n \leq M_n < \ell + \varepsilon$, donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- (ii) et (iii) Démontrons seulement (ii). Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n \geq m_n$ à partir d'un certain rang N et $m_n > A$ à partir d'un certain rang N' . Posons $n_0 = \max\{N, N'\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$: $u_n \geq m_n > A$, donc $u_n > A$. ■

Exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$.

En effet Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq n$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, donc d'après le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$.

Le théorème des gendarmes est souvent utilisé sous l'une des deux formes suivantes :

Corollaire Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

- (i) Si $|u_n| \leq \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
- (ii) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \varepsilon_n = 0$.

Démonstration

- (i) Directement le théorème des gendarmes, puisqu'on suppose que $-\varepsilon_n \leq u_n \leq \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang.
- (ii) Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq K$. Multiplions ensuite par ε_n : $|u_n \varepsilon_n| \leq K|\varepsilon_n|$. Il ne reste plus qu'à utiliser (i) ! ■

Exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

En effet La suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemple (Comparaison exponentielles/factorielle) Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

En effet Nous pouvons supposer $a \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$, de sorte que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0$, $\left| \frac{a}{n+1} \right| = \frac{|a|}{n+1} < \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang N . Du coup par produit, pour tout $n \geq N$:

$$\left| \frac{u_n}{u_N} \right| = \prod_{k=N}^{n-1} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{|a|}{k+1} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}, \text{ puis } |u_n| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n 2^N |u_N|.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n 2^N |u_N| = 0$, on a bien montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Théorème (Limite d'une suite géométrique) Soit $a \in \mathbb{R}$.

	$a > 1$	$a = 1$	$ a < 1$	$a \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$	∞	1	0	Pas de limite

Démonstration

- **Cas où $a > 1$:** Alors $a^n = \left(1 + (a-1)\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-1)^k = 1 + n(a-1) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (a-1)^k \stackrel{a>1}{\geq} n(a-1)$ pour tout $n \geq 2$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a-1) = \infty$ car $a > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ d'après le théorème de minoration.
- **Cas où $|a| < 1$:** Alors $\frac{1}{|a|} > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = \infty$ d'après le cas précédent, puis $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = 0$ par passage à l'inverse, et enfin $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.
- **Cas où $a = -1$:** Le cas de la suite $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ a déjà été traité — théorème des suites extraites...
- **Cas où $a < -1$:** Alors $a^2 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} = \infty$ d'après le premier cas, et : $a^{2n+1} = a^{2n} \times a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ car $a < 0$. Les suites extraites $(a^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ n'ayant pas la même limite, la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite. ■

Exemple Pour tout $a \in]-1, 1[$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^n} = 0$.

En effet Nous avons établi juste avant que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. Par ailleurs $(a^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

❌❌❌ **Attention !** La suite de terme général a^{2^n} n'est pas géométrique : a^{2^n} et $(a^2)^n$ n'ont RIEN à voir l'un avec l'autre. Cette confusion est fréquente chez les élèves, mais vous me ferez le plaisir de l'éviter.

4.2 THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE

Le théorème de la limite monotone est **LE** théorème d'existence par excellence.

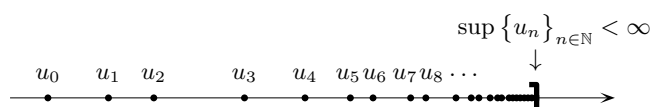
Théorème (Théorème de la limite monotone) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existe.

Plus précisément, les bornes supérieures et inférieures étant prises dans $\mathbb{R}$:

- (i) si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On retiendra qu'une suite croissante majorée converge et qu'une suite croissante non majorée diverge vers ∞ ;
- (ii) si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On retiendra qu'une suite décroissante minorée converge et qu'une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

🐞🐞🐞 **Explication** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, les u_n viennent s'écraser contre leur « sup ».



Démonstration Contentons-nous de montrer l'assertion (i).

- Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée. L'ensemble $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède donc une borne supérieure ℓ dans $\mathbb{R}$ d'après la propriété de la borne supérieure. Nous allons montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.
Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ car ℓ en est le plus petit majorant. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. Du coup pour tout $n \geq N$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante : $u_n \geq u_N > \ell - \varepsilon$, mais donc aussi : $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$, ou encore $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée par A , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Du coup pour tout $n \geq N$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante : $u_n \geq u_N > A$, donc $u_n > A$. Bref : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$. ■

❌❌❌ **Attention !**

- Une suite qui possède une limite n'est pas nécessairement monotone. Par exemple, la suite de terme général $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente de limite 0 mais non monotone : elle oscille en permanence autour de 0.
- Une suite croissante majorée par un certain réel M possède une limite, mais cette limite n'a aucune raison d'être M lui-même car M n'est jamais qu'un un majorant parmi d'autres.

Les deux exemples suivants doivent être étudiés très sérieusement : vous devez absolument savoir faire ce type de raisonnement. Nous verrons d'autres exemples semblables dans peu de temps.

Exemple On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$. Cette suite diverge vers ∞ .

En effet Cette suite est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = e^{u_n} \geq 0$. Le théorème de la limite monotone affirme donc l'existence de $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, que nous notons ℓ , et affirme aussi que $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Faisons l'hypothèse que $\ell \in \mathbb{R}$. Sachant que $\lim_{x \rightarrow \ell} e^x = e^\ell$: $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + e^{u_n}) = \ell + e^\ell$, donc $e^\ell = 0$ — contradiction ! Il en découle que ℓ n'est pas un réel, et donc $\ell = \infty$.

Exemple On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$. Cette suite converge vers 0.

En effet Parce que l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction $x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$, et parce que $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n > 0$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Du coup : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2} - u_n = \frac{-u_n^3}{1 + u_n^2} \leq 0$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc convergente d'après le théorème de la limite monotone, disons de limite ℓ .

Ensuite : $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{1 + u_n^2} = \frac{\ell}{1 + \ell^2}$, donc $\ell - \frac{\ell}{1 + \ell^2} = \frac{\ell^3}{1 + \ell^2} = 0$, et finalement $\ell = 0$.

4.3 THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

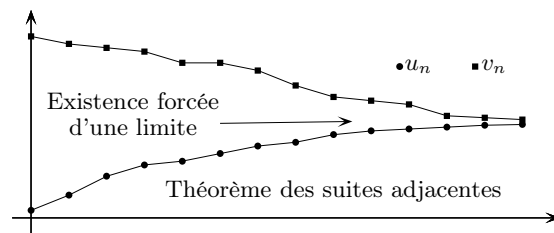
Définition (Suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème (Théorème des suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si elles sont adjacentes, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de même limite ℓ .

Précisément, si c'est $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $u_m \leq \ell \leq v_n$.

🔗 🔗 🔗 Explication

Intuitivement, deux suites adjacentes sont deux suites qui viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et qui finissent par s'écraser l'une contre l'autre. Le théorème des suites adjacentes affirme simplement que, puisqu'elles s'écrasent l'une contre l'autre à l'infini, il faut bien qu'elles s'écrasent *quelque part* — théorème d'**existence**.



Démonstration On suppose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

- Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$.
Supposons par l'absurde que pour un certain $N \in \mathbb{N}$, $u_N > v_N$, i.e. $u_N - v_N > 0$. Alors pour tout $n \geq N$, sachant que $u_N \leq u_n$ (croissance) et que $v_n \leq v_N$ (décroissance) : $u_n - v_n \geq u_N - v_N$. Faisons tendre n vers ∞ : $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) \geq u_N - v_N$. Du coup $0 \geq u_N - v_N > 0$. Contradiction !
- Montrons ensuite que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $u_m \leq v_n$.
Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m \leq n$, $u_m \leq u_n \leq v_n$ par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'après le premier point ; et si $m > n$, $u_m \leq v_m \leq v_n$ par décroissance de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'après le premier point. Dans les deux cas, $u_m \leq v_n$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0), donc convergente de limite un certain réel ℓ_u en vertu du théorème de la limite monotone. De même, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par u_0), donc convergente de limite un certain réel ℓ_v . L'égalité $\ell_u = \ell_v$ découle de ce que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$. Comme voulu, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.
- Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $u_m \leq \ell_u = \ell_v \leq v_n$ découle du deuxième point. A m fixé, nous obtenons $u_m \leq \ell_v$ en faisant tendre n vers ∞ , et à n fixé, $\ell_u \leq v_n$ en faisant tendre m vers ∞ . ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Nous verrons plus tard dans l'année que sa limite est le nombre e .

En effet Posons $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Cela montrera bien qu'elles convergent en vertu du théorème des suites adjacentes.

- Tout d'abord : $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- Ensuite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$.
- Enfin $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+1)!} \left(n(n+1) + n - (n+1)^2 \right) = \frac{-1}{n(n+1) \cdot (n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

Si $[a, b]$ est un segment, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, on appelle *longueur de* $[a, b]$ et on note $\lambda([a, b])$ le réel positif : $\lambda([a, b]) = b - a$.

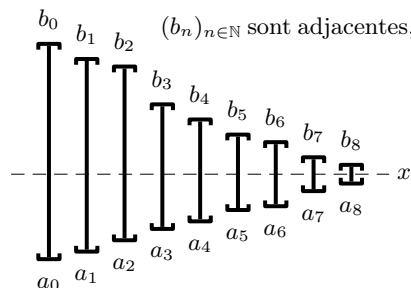
Théorème (Théorème des segments emboîtés) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de **SEGMENTS** :

- décroissante au sens où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \subseteq I_n$;
- dont la suite des longueurs converge vers 0, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(I_n) = 0$.

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton, i.e. : $\exists x \in \mathbb{R} / \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

🐞🐞🐞 **Explication** Ce théorème n'est jamais qu'une reformulation du théorème des suites adjacentes en termes ensemblistes. Il affirme que lorsqu'on calcule l'intersection d'une famille décroissante de segments de longueurs tendant vers 0, **il ne reste pas rien** : il reste exactement **UN** élément — théorème d'**existence**.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \inf I_n$ et $b_n = \sup I_n$ de sorte que $I_n = [a_n, b_n]$. Par hypothèse $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, et $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Cela signifie précisément que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et



$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergentes de même limite un certain réel x . Il reste à montrer que : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

- Soit $t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Montrons que $t = x$. Il suffit de faire tendre n vers ∞ dans les inégalités « $a_n \leq t \leq b_n$ » : $x \leq t \leq x$, i.e. $t = x$.

- Inversement, montrons que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Or $a_n \leq x \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le théorème des suites adjacentes, bref $x \in [a_n, b_n] = I_n$. ■

✖✖✖ **Attention !** Il est essentiel que les I_n soient des **SEGMENTS**. Avec des intervalles ouverts ou semi-ouverts, le résultat est faux. Par exemple : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] 0, \frac{1}{n} \right] = \emptyset$, car pour tout $x > 0$, $x \notin \left] 0, \frac{1}{N} \right]$ pour $N = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$.

Le résultat suivant, dans lequel figurent des suites adjacentes mais qui ne repose pas sur le théorème des suites adjacentes, est à rapprocher de deux résultats que nous avons étudiés récemment : entre deux rationnels (resp. irrationnels) il y a une infinité d'irrationnels (resp. rationnels).

Théorème (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

- Tout réel est la limite d'une suite de rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense dans* $\mathbb{R}$.

- Précisément, soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$.

Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes à valeurs rationnelles de limite commune x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est la valeur décimale approchée de x par défaut à 10^{-n} près et b_n est la valeur décimale approchée de x par excès à 10^{-n} près.

🐞🐞🐞 **Explication** Nous savons intuitivement, sans rentrer dans les détails, que tout réel possède un développement décimal illimité. Par exemple, $\pi = 3,141592653589793 \dots$. Calculons, pour $x = \pi$, les premiers termes des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = \frac{31}{10} = 3,1, \quad a_2 = \frac{314}{100} = 3,14, \quad a_3 = \frac{3141}{1000} = 3,141, \quad a_4 = \frac{31415}{10000} = 3,1415, \quad a_5 = \frac{314159}{100000} = 3,14159 \dots$$

$$\text{et } b_0 = 4, \quad b_1 = \frac{32}{10} = 3,2, \quad b_2 = \frac{315}{100} = 3,15, \quad b_3 = \frac{3142}{1000} = 3,142, \quad b_4 = \frac{31416}{10000} = 3,1416, \quad b_5 = \frac{314160}{100000} = 3,14160 \dots$$

On voit bien que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers π .

Démonstration Les notations sont celles du théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$, donc $x - \frac{1}{10^n} < a_n \leq x$. Le théorème des gendarmes montre donc aussitôt que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Du coup bien sûr, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ également. Comme a_n et b_n sont rationnels pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela prouve bien que x est la limite d'une suite de rationnels. Nous montrons ci-dessous l'adjacence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

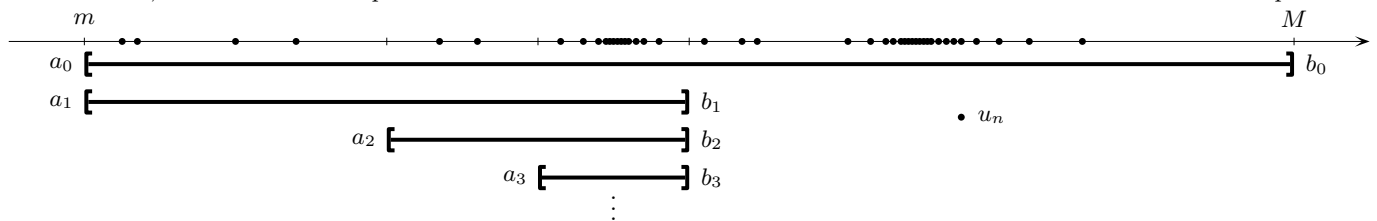
- Tout d'abord : $b_n - a_n = \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- Montrons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Partons de l'inégalité $10^n a_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$ et multiplions-la par 10 : $10^{n+1} a_n \leq 10^{n+1} x$. Or $10^{n+1} a_n$ est un **entier**, donc par définition de la partie entière : $10^{n+1} a_n \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor = 10^{n+1} a_{n+1}$. Divisons par 10^{n+1} : $a_n \leq a_{n+1}$.
- Montrons que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord $10^n b_n = 10^n a_n + 1 = \lfloor 10^n x \rfloor + 1 > 10^n x$. Multiplions par 10 : $10^{n+1} b_n > 10^{n+1} x$. Or $10^{n+1} b_n$ est un **entier**, donc par définition de la partie entière : $10^{n+1} b_n \geq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 = 10^{n+1} a_{n+1} + 1 = 10^{n+1} b_{n+1}$. Divisons par 10^{n+1} : $b_n \geq b_{n+1}$. ■

4.4 THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Contrairement aux autres théorèmes étudiés dans cette partie, ce théorème a pour nous un intérêt essentiellement théorique. Il établit une sorte de réciproque — mais pas jusqu'au bout — au résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

✂ ✂ ✂ **Explication** Ce théorème est un théorème d'**existence** d'un genre particulier. Il n'affirme pas que toute suite bornée est convergente — on a vu que c'est faux — mais qu'une suite bornée possède toujours une suite **extraite** convergente. Intuitivement, cela revient à dire que les valeurs d'une suite bornée sont forcées de s'accumuler autour d'au moins un point.



Démonstration Le programme stipule que vous n'êtes pas obligés de savoir refaire cette démonstration, mais il vous impose de connaître l'*algorithme de dichotomie* sur laquelle elle repose...

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée, disons entre deux réels m et M avec $m \leq M$. Nous cherchons une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Nous allons construire pas à pas une telle φ au moyen d'un algorithme appelé *dichotomie*.

On commence en posant $a_0 = m$, $b_0 = M$ et $\varphi(0) = 0$. Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n) \in \mathbb{N}$ tels que :

- (i) $m = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0 = M$;
- (ii) pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $b_k - a_k = \frac{M - m}{2^k}$;
- (iii) l'ensemble $\left\{ i \in \mathbb{N} / u_i \in [a_k, b_k] \right\}$ est infini pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$;
- (iv) pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$;
- (v) $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$.

Nous allons construire trois réels a_{n+1} , b_{n+1} et $\varphi(n+1)$ rendant vraies les assertions (i) à (v) au rang $(n+1)$. Dans ce but, remarquons qu'au moins l'un des ensembles $\left\{ k \in \mathbb{N} / u_k \in \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right] \right\}$ et $\left\{ k \in \mathbb{N} / u_k \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right] \right\}$ est infini, car si les deux étaient finis, il en serait de même de leur réunion égale à $\left\{ k \in \mathbb{N} / u_k \in [a_n, b_n] \right\}$, et cela contredirait (iii).

Du coup, posons :
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et} & b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si} & \left\{ k \in \mathbb{N} / u_k \in \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right] \right\} \text{ est infini (cas } \spadesuit) \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \text{et} & b_{n+1} = b_n & \text{sinon (cas } \clubsuit). \end{cases}$$

Par construction, $\left\{ k \in \mathbb{N} / u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \right\}$ est infini, donc aussi $\left\{ k \in \mathbb{N} / k > \varphi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \right\}$ — le même ensemble à ceci près qu'on a ôté les éléments inférieurs ou égaux à $\varphi(n)$, qui sont en nombre fini. Ce deuxième ensemble, en particulier, est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc possède un plus petit élément que nous allons noter $\varphi(n+1)$.

- **Assertion (i) au rang $n+1$:** Comme $a_n \leq b_n$ d'après (i) au rang n , alors $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$, et donc $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, que l'on soit dans le cas ♠ ou dans le cas ♣.
- **Assertion (ii) au rang $n+1$:**
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{(i)}{=} \frac{M - m}{2^{n+1}} & (\text{cas } \spadesuit) \\ b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{(i)}{=} \frac{M - m}{2^{n+1}} & (\text{cas } \clubsuit). \end{cases}$$
- **Assertion (iii) au rang $n+1$:** Déjà fait.
- **Assertions (iv) et (v) au rang $n+1$:** Vraies par définition de $\varphi(n+1)$.

Ouf! Fin de la construction. Nous avons construit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la première croissante et la seconde décroissante, et une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telles que :

- 1) $b_n - a_n = \frac{M - m}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en particulier $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$;
- 2) $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il apparaît ainsi que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergentes de limite commune un certain réel ℓ d'après le théorème des suites adjacentes. Enfin 2) nous met en situation d'utiliser le théorème des gendarmes, donc en effet la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers ℓ). ■

5 ETUDE DE SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE

Théorème (Monotonie des suites définies par récurrence) Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans D — bref : D est stable par f . On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (i) Si f est croissante, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1 .
- (ii) Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2 .

✕✕✕ **Attention !** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{2n})$ vaut u_{2n+1} et non pas u_{2n+2} . Par contre $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, ce qui prouve que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente associée à la fonction $f \circ f$. Même chose pour la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration

- (i) Supposons f croissante et montrons que, si $u_0 \leq u_1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante — on montrerait de même que si $u_1 \leq u_0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Simple récurrence de rien du tout :
 - **Initialisation :** $u_0 \leq u_1$ par hypothèse.
 - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leq u_{n+1}$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ car f est croissante et c'est fini.
- (ii) Supposons f décroissante. Alors $f \circ f$ est croissante. Or $u_{2n+2} = u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone d'après (i) : croissante si $u_0 \leq u_2$, décroissante si $u_2 \leq u_0$. Dans le cas où $u_0 \leq u_2$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$ par décroissance de f . Bref : $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Dans le cas où $u_2 \leq u_0$, on montre de même que $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Dans les deux cas, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. ■

Théorème (Limite des suites définies par récurrence) Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans D — bref : D est stable par f . On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

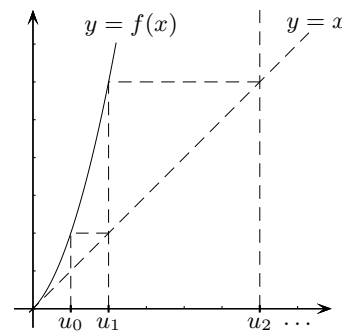
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est **continue en ℓ** , alors ℓ est une *point fixe* de f , i.e. $f(\ell) = \ell$.

Démonstration Comme f est continue en ℓ , $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$. Composons avec la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \ell$, donc en effet $f(\ell) = \ell$. ■

Etudiez les exemples suivants avec le plus grand soin. On attend beaucoup d'autonomie de votre part dans ce type d'exercices.

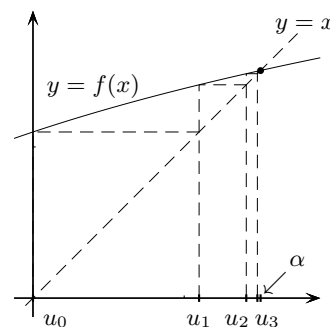
Exemple On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
On note en outre f la fonction $x \mapsto x^2 + x$.

- Clairement, $\mathbb{R}_+$ est stable par f . Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs positives ou nulles.
- Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $u_1 = u_0^2 + u_0 = 2 \geq u_0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite ℓ d'après le théorème de la limite monotone. — On pouvait aussi remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$.
- Supposons par l'absurde que $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $f(\ell) = \ell$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, i.e. $\ell = 0$. Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = 1$, donc $\ell \geq 1$. Contradiction ! Ainsi $\ell = \infty$.
- Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers ∞ .



Exemple On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$.
On note en outre f la fonction $x \mapsto \ln(x + 3)$ définie sur $] -3, \infty[$.

- L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par f car pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \ln(x + 3) \geq \ln 1 = 0$. Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans positives ou nulles.
- Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $u_1 = \ln(u_0 + 3) = \ln 3 \geq 0 = u_0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc possède une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$ d'après le théorème de la limite monotone.
- Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait que si ℓ est finie, alors $f(\ell) = \ell$. Nous voilà donc conduits à étudier les zéros de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.



1) g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ car dérivable de dérivée $x \mapsto -\frac{x+2}{x+3}$ strictement négative.

2) g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3) Enfin $g(0) = \ln 3$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g = -\infty$ — savez-vous le justifier proprement ?

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $] -\infty, \ln 3]$. En particulier, puisque $0 \in] -\infty, \ln 3]$, l'équation $g(x) = 0$ ou $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution α .

- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \alpha$. **Initialisation :** $u_0 = 0 \leq \alpha$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leq \alpha$. Alors f étant croissante, $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(\alpha) = \alpha$ et voilà.

- Le point précédent montre en particulier que $\ell \in [0, \alpha]$, et nous pouvons dès lors affirmer que $f(\ell) = \ell$. Par définition de α , $\ell = \alpha$ nécessairement.
- Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α en croissant.

Exemple On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
On note en outre f la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

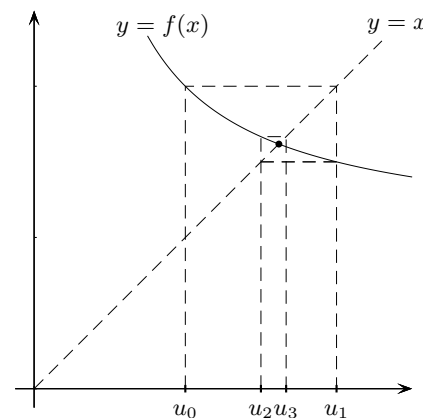
- L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs strictement positives.
- La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f l'est tout autant. Or $u_1 = 2$ et $u_2 = \frac{3}{2} \geq u_0$, donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante. Ces deux suites possèdent alors chacune une limite en vertu du théorème de la limite monotone, disons $\ell > 0$ et $\ell' > 0$ respectivement.
- Déterminons les points fixes de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = x \iff 1 + \frac{1}{x} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

- Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2n} \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \leq u_{2n+1}$.

1) **Initialisation :** $u_0 = 1 \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \leq 2 = u_1$.

2) **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_{2n} \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \leq u_{2n+1}$. Or f est décroissante, donc $f \circ f$ est croissante, donc : $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \leq f \circ f(u_{2n+1}) = u_{2n+3} = u_{2(n+1)+1}$.



- Les informations de monotonie/majoration/minoration dont nous disposons nous garantissent que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell' \in \mathbb{R}_+^*$. Or $f \circ f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc : $\ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1}$, ou encore $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ avec $\ell > 0$. Finalement $\ell = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, et $\ell' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ par un raisonnement analogue.
- Conclusion : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergentes de même limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, le théorème des suites extraites affirme que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

✖ ✖ ✖ **Attention !** Dans le cas où f est décroissante, il se peut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'ait pas de limite. C'est le cas des suites arithmético-géométriques « $u_{n+1} = au_n + b$ » pour $a \leq -1$. Exemple : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $a = -1$ et $b = 0$.

6 EXTENSION AU CAS DES SUITES COMPLEXES

Nous allons brièvement étendre les résultats que nous avons obtenus pour les suites réelles aux suites complexes.

Définition (Suite complexe) On appelle *suite complexe* toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

✖ ✖ ✖ **Attention !** Pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, donc pas de suites complexes majorées/minorées/monotones ! Hélas !

Chose remarquable : la notion de suite bornée a toujours un sens.

Définition (Suite bornée) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq K$.

On définit comme avant les notions de suite extraite et de propriété vraie à partir d'un certain rang.

Pour une suite complexe, la notion de limite infinie n'a aucun sens, car il est où l'infini dans $\mathbb{C}$? Y a-t-il un seul infini ? Un dans chaque direction ? Dans $\mathbb{R}$ ces questions ne se posaient pas : ∞ et $-\infty$ étaient bien définis et distincts. Pourquoi bien définis ? Parce qu'on a sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre totale $\leq$ dont ne manquaient que les extrémités. Dans $\mathbb{C}$, pas d'inégalités...

Définition (Voisinage dans $\mathbb{C}$) Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On appelle *voisinage de ℓ (dans $\mathbb{C}$)* tout disque ouvert de centre ℓ , c'est-à-dire tout ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C} / |z - \ell| < \varepsilon\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

🔗 🔗 🔗 Explication

Un voisinage de ℓ dans $\mathbb{C}$ contient tous les nombres complexes à proximité immédiate de ℓ . C'est la même notion que dans le cas réel, mais on travaille ici avec deux dimensions. Comme dans le cas réel également, la définition donnée ici n'est qu'une **version simplifiée** de la définition mathématique usuelle.



Voisinage de $\ell \in \mathbb{C}$

Définition (Limite d'une suite complexe) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, i.e. si :

pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ , u_n appartient à $\mathcal{V}$ à partir d'un certain rang.

Cela revient à dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \ell| = 0$, ce qui nous ramène au cas des limites de suites réelles :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable.

🔗 🔗 🔗 **Explication** Même définition que dans le cas des suites réelles. La seule modification, c'est l'allure des voisinages.

Exemple Pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

En effet Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ revient, comme dans le cas réel, à montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = 0$. Or nous savons très bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$ quand $|a| < 1$.

Théorème (Caractérisation de la limite à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell. \quad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell).$$

Démonstration

(i) $\implies$ (ii) Faisons l'hypothèse que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ et montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell)$ — preuve analogue pour la partie imaginaire. Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \ell| = 0$ et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| = |\operatorname{Re}(u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell|$. Attention : on applique ici le théorème des gendarmes à des suites **réelles** !

(ii) $\implies$ (i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell)$, alors par définition du module, étant données les opérations qu'on peut faire sur les limites, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \ell| = 0$. Ceci signifie précisément que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$. ■

Exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + i \operatorname{Arctan} n \right) = \frac{i\pi}{2}$.

On définit comme avant les notions de suite convergente et de suite divergente. Il est toujours vrai qu'une suite convergente est bornée.

Les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les limites donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis. De même, le théorème des suites extraites est maintenu.

Les grands théorèmes d'existence de limites n'ont pas de sens dans le cas des suites complexes car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Seul le théorème de Bolzano-Weierstrass échappe à cette remarque, mais il ne figure pas à notre programme dans le cas complexe.