

RELATIONS D'ORDRE

Dans tout ce chapitre, E est un ensemble.

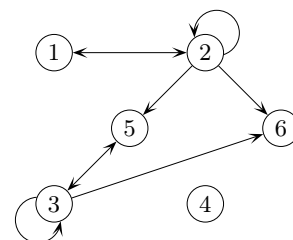
1 RELATIONS BINAIRES

Définition (Relation binaire) On appelle *relation binaire* sur E tout triplet $\mathcal{R} = (E, E, \Gamma)$ où Γ est une partie de $E \times E$. Au lieu de noter $(x, y) \in \Gamma$, on notera généralement $x \mathcal{R} y$, ce qui se lit : « x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ ».

🐞 🐞 🐞 **Explication** Une relation binaire sur E n'est qu'une façon de relier entre eux certains éléments de E .

- Il faut bien noter qu'en général, si $x \mathcal{R} y$, il n'est pas forcément vrai que $y \mathcal{R} x$. Qu'on pense à la relation « être amoureux de » : il est bien connu qu'on peut être amoureux sans être aimé en retour.
- On peut représenter toute relation binaire $\mathcal{R}$ sur E au moyen de ce qu'on appelle un *graphe orienté* dont les *sommets* sont les points de E . Deux sommets x et y sont liés par une *arête* orientée de x vers y s'il est vrai que $x \mathcal{R} y$. Une flèche double indique qu'on a à la fois $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$. Le graphe ci-contre représente la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ définie par :

$$1 \mathcal{R} 2, \quad 2 \mathcal{R} 1, \quad 2 \mathcal{R} 2, \quad 2 \mathcal{R} 5, \quad 2 \mathcal{R} 6, \quad 3 \mathcal{R} 3, \quad 3 \mathcal{R} 5, \quad 3 \mathcal{R} 6 \quad \text{et} \quad 5 \mathcal{R} 3.$$



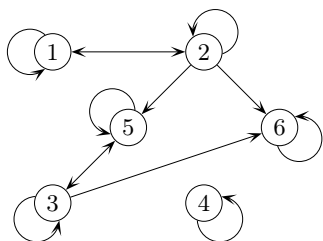
Exemple Vous connaissez depuis toujours certaines relations binaires :

- la relation d'égalité $=$ sur E , pour laquelle $\Gamma = \{(x, x)\}_{x \in E}$;
- la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$, pour laquelle $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \leq y\}$;
- la relation $\leq$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, définie pour toutes fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par : $f \leq g \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x))$;
- la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$, définie pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ par : $m|n \iff \exists k \in \mathbb{Z} / n = km$.

Définition (Propriétés des relations binaires) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

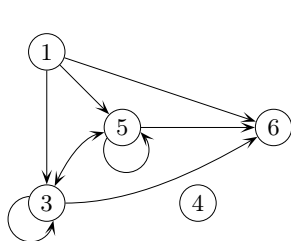
- On dit que $\mathcal{R}$ est *réflexive* si : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est *transitive* si : $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est *symétrique* si : $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \iff y \mathcal{R} x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* si : $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \implies x = y$.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Ces propriétés éventuelles des relations binaires « se voient » particulièrement bien sur les représentations sous forme de graphes — c'est un peu moins clair pour la transitivité.

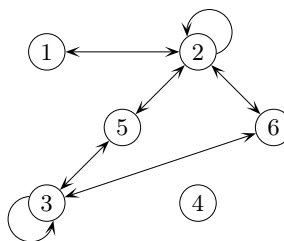


Réflexivité :

Une boucle à chaque sommet

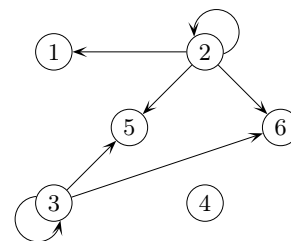


Transitivité



Symétrie :

Que des flèches doubles à part celles qui bouclent



Antisymétrie :

Aucune flèche double à part éventuellement celles qui bouclent

Exemple

- La relation d'égalité $=$ sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- Les relations $\leq$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont réflexives, transitives et antisymétriques. Elles ne sont pas symétriques car par exemple :

$$1 \leq 2 \quad \text{mais} \quad 2 \not\leq 1, \quad \text{et} \quad (x \mapsto x) \leq (x \mapsto x+1) \quad \text{mais} \quad (x \mapsto x+1) \not\leq (x \mapsto x).$$

- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.
- La relation $|$ de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique car par exemple $-2|2$ et $2|-2$ alors que $-2 \neq 2$.
- La relation d'inclusion $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
- La relation « avoir le même signe » $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^*$ définie pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ par : $x \mathcal{S} y \iff x \text{ et } y \text{ ont le même signe}$ est réflexive, transitive et symétrique.

Définition (Eléments comparables, relation binaire totale/partielle) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E .

- Deux éléments $x \in E$ et $y \in E$ sont dits *comparables* par $\mathcal{R}$ si : $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$ — éventuellement les deux.
- On dit que la relation $\mathcal{R}$ est *totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables par $\mathcal{R}$, i.e. si :

$$\forall x, y \in E, \quad x \mathcal{R} y \quad \text{ou} \quad y \mathcal{R} x.$$

Une relation non totale est dite *partielle*.

××× Attention ! Toute relation binaire n'est pas totale ! Quand vous voulez montrer que $x \mathcal{R} y$ pour certains $x, y \in E$, ne raisonnez pas par l'absurde en supposant que $y \mathcal{R} x$: il est possible qu'aucune de ces deux relations ne soit vraie.

Exemple

- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale. En particulier tous les réels sont comparables à 0 — positifs ou négatifs — et c'est pourquoi, par exemple, on a eu le droit de définir la fonction valeur absolue $|x|$ sur $\mathbb{R}$ en distinguant deux cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.
- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est partielle car, par exemple, $\sin$ et $\cos$ ne sont pas comparables : on n'a ni $\sin \leq \cos$, ni $\cos \leq \sin$.
- La relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{Z}$ est partielle car, par exemple, 2 et 3 ne sont comparables : on n'a ni $2|3$, ni $3|2$.
- La relation d'inclusion $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ est partielle dès que E contient au moins deux éléments. En effet, si a et b sont deux éléments **distincts** de E , alors on n'a ni $\{a\} \subseteq \{b\}$ ni $\{b\} \subseteq \{a\}$.

2 RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

Les relations d'équivalence ne sont pas au programme de MPSI, mais comme le concept est éclairant dans bien des contextes, je vous recommande d'en connaître la définition et l'interprétation.

Définition (Relation d'équivalence) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* sur E si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, transitive et symétrique.

Les relations d'équivalence sont souvent notées $\sim$ ou $\simeq$ ou $\approx$...

Exemple La relation d'égalité $=$ sur E et la relation « avoir même signe » sur $\mathbb{R}^*$ sont des relations d'équivalence.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation de *congruence modulo n* sur $\mathbb{Z}$ définie par : $a \equiv b \pmod{n} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / b = a + kn$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.

En effet

- **Réflexivité :** Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a = a + 0 \times n$ avec $0 \in \mathbb{Z}$, donc $a \equiv a \pmod{n}$.
- **Transitivité :** Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n}$, i.e. $b = a + kn$ et $c = b + ln$ pour certains $k, l \in \mathbb{Z}$. Alors $c = b + ln = (a + kn) + ln = a + (k + l)n$ avec $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $a \equiv c \pmod{n}$.
- **Symétrie :** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b \pmod{n}$, i.e. $b = a + kn$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Alors $a = b + (-k)n$ avec $-k \in \mathbb{Z}$, donc $b \equiv a \pmod{n}$.

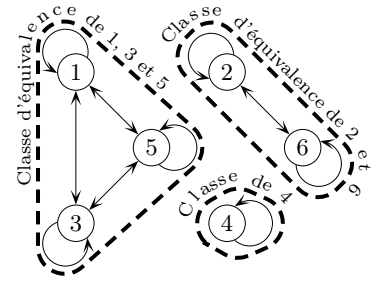
Théorème (Classes d'équivalence d'une relation d'équivalence) Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E .

- Pour tout $x \in E$, on appelle *classe d'équivalence* de x (pour $\sim$) l'ensemble $\{y \in E / x \sim y\}$.
- Les classes d'équivalences pour $\sim$ forment une *partition* de E . Cela revient à dire qu'elles sont non vides, que leur réunion est E tout entier, et qu'elles sont deux à deux égales ou disjointes.

🐼 🐼 🐼 Explication

En résumé, d'après ce théorème, la relation « avoir la même nationalité » sur l'ensemble des êtres humains est le modèle générique de toute relation d'équivalence — si l'on fait abstraction du problème des apatrides et de celui de la double nationalité. L'humanité est divisée en nationalités : il y a la classe d'équivalence des Français, celle des Allemands, celle des Japonais, etc.

Bref, toute relation d'équivalence peut être exprimée en français sous la forme « Avoir le même (...) que » : « avoir le même signe » (relation $\mathcal{S}$), « avoir le même reste de division euclidienne par n » (congruence modulo n), etc.



Démonstration Pour tout $x \in E$, notons $cl(x)$ la classe d'équivalence de x pour $\sim$.

- Pour tout $x \in E$, $x \sim x$ par symétrie de $\sim$, donc $x \in cl(x)$, donc en particulier $cl(x)$ est non vide.
- Clairement $E = \bigcup_{x \in E} cl(x)$ car pour tout $x \in E$, $x \in cl(x)$.
- Enfin, soient $x, y \in E$ pour lesquels $cl(x) \cap cl(y) \neq \emptyset$ — on peut donc se donner un élément z commun à $cl(x)$ et $cl(y)$. Nous allons montrer qu'alors $cl(x) = cl(y)$, et par symétrie des rôles de x et y , il nous suffit même d'une inclusion.
Soit $t \in cl(x)$. Montrons que $t \in cl(y)$, i.e. que $y \sim t$. Or $y \sim z$ car $z \in cl(y)$, et $z \sim x$ car $z \in cl(x)$ et par symétrie de $\sim$, et enfin $x \sim t$ car $t \in cl(x)$. Par transitivité de $\sim$, $y \sim t$ comme voulu. ■

Exemple

- La relation « avoir même signe » sur $\mathbb{R}^*$ possède deux classes d'équivalence : la classe $\mathbb{R}_+^*$ et la classe $\mathbb{R}_-^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe n classes d'équivalence pour la relation de congruence modulo n : la classe $n\mathbb{Z}$ de 0, la classe $1 + n\mathbb{Z}$ de 1, la classe $2 + n\mathbb{Z}$ de 2... et la classe $(n-1) + n\mathbb{Z}$ de $n-1$. Nous démontrerons ce résultat proprement plus tard dans l'année. Ceux qui connaissent le théorème de la division euclidienne comprendront que c'est exactement ce dont il est question : $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists ! r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / a \equiv r \pmod n$.

3 RELATIONS D'ORDRE

3.1 DÉFINITION

Définition (Relation d'ordre) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* sur E si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique.

Les relations d'ordre sont souvent notées $\leq$ ou $\preceq$ ou $\lesssim$ ou $\preccurlyeq$...

Exemple Les relations $\leq$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont des relations d'ordre, ainsi que la relation d'inclusion $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$.

Exemple La relation de divisibilité $|$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, mais elle en est une sur $\mathbb{N}$.

En effet Nous avons déjà vu que la relation $|$ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas antisymétrique. Travaillons donc sur $\mathbb{N}$.

- **Réflexivité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n|n$ car $n = 1 \times n$.
- **Transitivité** : Soient $n, n', n'' \in \mathbb{N}$ tels que $n|n'$ et $n'|n''$. Montrons que $n|n''$.
Or puisque $n|n'$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n' = kn$; et puisque $n'|n''$, il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n'' = k'n'$. Du coup $n'' = k'n' = kk'n$, et donc $n|n''$.
- **Antisymétrie** : Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $n|n'$ et $n'|n$. Montrons que $n = n'$.
Or puisque $n|n'$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n' = kn$; et puisque $n'|n$, il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n = k'n'$. Alors $n = k'n' = kk'n$. Deux cas doivent être distingués ici :

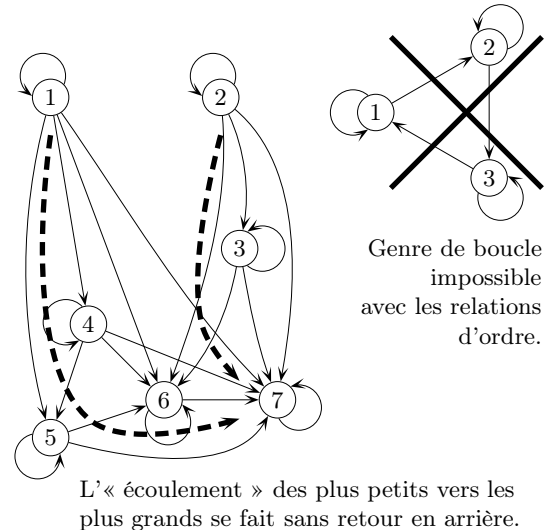
- 1) Si $n = 0$, alors $n' = kn = k \times 0 = 0$ et donc $n = n'$ comme voulu.
- 2) Si $n \neq 0$, on obtient $kk' = 1$ en simplifiant par n . Or k et k' sont deux entiers naturels, donc $k = k' = 1$. Ici aussi, $n = k'n' = n'$.

🐞 🐞 🐞 Explication

Une relation d'ordre sur E , comme son nom l'indique, institue un ordre entre les éléments de E , « ordre » au sens de « hiérarchie » : il y a un haut et un bas, des plus petits et des plus grands. Une relation notée $x \preccurlyeq y$ s'interprète généralement en disant que x est plus petit que y , mais c'est là une désignation conventionnelle et on pourrait décréter que cela signifie que x est plus grand que y .

Dans le graphe associé à une relation d'ordre $\preccurlyeq$, les seules boucles imaginables sont liées à la réflexivité de $\preccurlyeq$. Il n'est pas possible d'avoir une boucle de la forme $x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_3 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq x_1$ dans laquelle les éléments sont **distincts** et $n \geq 2$, car la transitivité et l'antisymétrie de $\preccurlyeq$ forceraient l'égalité $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Cette propriété des relations d'ordre a un impact géométrique sur les graphes qui leur sont associés. Les graphes de relations d'ordre ont comme une orientation naturelle : en les parcourant on va toujours de l'avant, on ne revient jamais en arrière, on ne tourne jamais en rond. C'est un peu comme les réseaux fluviaux : les fleuves et les rivières coulent tous en direction de la mer et ne bouclent jamais. C'est précisément cette orientation ou « sens de lecture » qui nous invite à considérer que certains éléments sont plus petits/grands que d'autres.



Définition (Relation stricte associée à une relation d'ordre) Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E . La relation $\prec$ sur E définie pour tous $x, y \in E$ par : $x \prec y \iff x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$ est transitive et antisymétrique, appelée la *relation stricte associée à $\preccurlyeq$* .

Démonstration

- **Transitivité :** Soient $x, y, z \in E$. On suppose que $x \prec y$ et $y \prec z$. Alors en particulier $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$, donc par transitivité de $\preccurlyeq$: $x \preccurlyeq z$. L'égalité $x = z$ est-elle possible ? Si $x = z$, alors $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, donc $x = y$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$ — alors que par hypothèse $x \neq y$. Comme voulu : $x \preccurlyeq z$ et $x \neq z$, i.e. $x \prec z$.
- **Antisymétrie :** Soient $x, y \in E$. On suppose que $x \prec y$ et $y \prec x$. Alors en particulier $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, donc $x = y$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$. ■

Exemple Naturellement, la relation usuelle $<$ sur $\mathbb{R}$ est la relation stricte de la relation d'ordre usuelle $\leq$.

3.2 MAJORANTS/MINORANTS

Définition (Majorant/minorant) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et $\mathcal{A}$ une partie de E .

- On dit que $\mathcal{A}$ est *majorée* (pour $\preccurlyeq$) s'il existe $M \in E$ tel que : $\forall a \in \mathcal{A}, a \preccurlyeq M$.

Un tel élément M est appelé un *majorant* de $\mathcal{A}$. On dit aussi que $\mathcal{A}$ est *majorée par M* ou encore que M *major*e $\mathcal{A}$.

- On dit que $\mathcal{A}$ est *minorée* (pour $\preccurlyeq$) s'il existe $m \in E$ tel que : $\forall a \in \mathcal{A}, m \preccurlyeq a$.

Un tel élément m est appelé un *minorant* de $\mathcal{A}$. On dit aussi que $\mathcal{A}$ est *minorée par m* ou encore que m *minore* $\mathcal{A}$.

- On dit que $\mathcal{A}$ est *bornée* (pour $\preccurlyeq$) si elle est à la fois majorée et minorée.

❌❌❌ **Attention !** Une partie majorée $\mathcal{A}$ possède en général plusieurs majorants : par exemple, si M en est un majorant et si $M \preccurlyeq M'$, alors M' est aussi un majorant de $\mathcal{A}$. C'est pourquoi on ne parle jamais « du » majorant, mais toujours d'un majorant de $\mathcal{A}$. Raisonnement analogue pour les minorants.

Exemple

- L'intervalle $] -\infty, 1]$ est majoré par 1 (pour $\leq$), mais aussi par $\sqrt{2}$, 3... En revanche il n'est pas minoré.
- L'ensemble $\{8, 10, 12\}$ est minoré par 2 et majoré par 120 pour la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$.
- $\mathcal{P}(E)$ est minoré par $\emptyset$ et majoré par E pour la relation d'inclusion.

3.3 PLUS GRANDS/PETITS ÉLÉMENTS

Définition (Plus grand/petit élément) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et $\mathcal{A}$ une partie de E .

- Soit $M \in E$. On dit que M est un *plus grand élément* de $\mathcal{A}$ ou un *maximum* de $\mathcal{A}$ (pour $\preccurlyeq$) si $M \in \mathcal{A}$ et si M est un majorant de $\mathcal{A}$.
- Soit $m \in E$. On dit que m est un *plus petit élément* de $\mathcal{A}$ ou un *minimum* de $\mathcal{A}$ (pour $\preccurlyeq$) si $m \in \mathcal{A}$ et si m est un minorant de $\mathcal{A}$.

☞ ☞ ☞ **Explication** Bref, un plus grand élément M d'une partie $\mathcal{A}$ est $\overbrace{\text{un élément de } \mathcal{A}}^{M \in \mathcal{A}}$ $\overbrace{\text{plus grand que tous les autres}}^{M \text{ majore } \mathcal{A}}$.

Théorème (Unicité du plus grand/petit élément) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E et $\mathcal{A}$ une partie de E .

Si $\mathcal{A}$ possède un plus grand (resp. petit) élément pour $\preccurlyeq$, celui-ci est unique. On peut donc l'appeler le plus grand (resp. petit) élément de $\mathcal{A}$ et le noter $\max \mathcal{A}$ (resp. $\min \mathcal{A}$).

☒ ☒ ☒ **Attention !** Les plus grands/petits éléments sont uniques... **s'ils existent !**

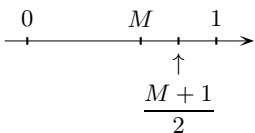
Démonstration Contentons du cas des plus grands éléments. Soient $M, M' \in E$ dont on suppose qu'ils sont tous deux plus grands éléments de $\mathcal{A}$. Alors $M' \preccurlyeq M$ car M majore $\mathcal{A}$ et $M' \in \mathcal{A}$, et de même $M \preccurlyeq M'$ car M' majore $\mathcal{A}$ et $M \in \mathcal{A}$. Conclusion : $M = M'$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$. ■

Exemple On travaille dans cette série d'exemples avec la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ n'a ni plus petit ni plus grand élément car il n'est ni minoré ni majoré.
- L'intervalle $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément — en revanche 0 est son plus petit élément.

En effet Contentons-nous de démontrer (ii).

- $0 \in [0, 1[$ et 0 est un minorant de $[0, 1[$, donc 0 est le plus petit élément de $[0, 1[$.
- Nous allons passer en revue tous les éléments de $[0, 1[$ et montrer qu'aucun d'entre eux ne majore $[0, 1[$. Cela montrera bien qu'aucun d'entre eux n'est un plus grand élément de $[0, 1[$.



Soit $M \in [0, 1[$. Montrer que M n'est pas un majorant de $[0, 1[$, c'est montrer que $a > M$ pour un certain $a \in [0, 1[$. Il nous suffit donc d'exhiber un réel compris strictement entre M et 1. Posons $a = \frac{M+1}{2}$. Comme $0 \leq M < 1$, alors $0 \leq a = \frac{M+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$, i.e. $a \in [0, 1[$. Enfin $a - M = \frac{1-M}{2} > 0$, donc $a > M$.

Exemple On travaille dans cette série d'exemples avec la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.

- 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ — eh oui ! — et 1 est son plus petit élément.
- L'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ne possède ni plus petit élément ni plus grand élément.
- L'ensemble $\{2, 3, 6\}$ possède un plus grand élément — c'est 6 — mais pas de plus petit élément.

En effet Démontrons seulement les assertions (i) et (ii).

- L'entier 0 est élément de $\mathbb{N}$ et plus grand que tout le monde car tout le monde le divise, donc c'est le plus grand élément de $\mathbb{N}$. L'entier 1 est élément de $\mathbb{N}$ et plus petit que tout le monde car il divise tout le monde, donc c'est le plus petit élément de $\mathbb{N}$.

- Raisonnons en deux temps.

1) Par l'absurde, supposons que $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ possède un plus petit élément m . Alors en particulier $m|2$ et $m|3$, donc $m|(3-2)$, i.e. $m|1$. Le seul diviseur de 1 étant 1 lui-même, on en déduit que $m = 1$. Ceci nous fournit une contradiction, car $1 \notin \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ alors que, par hypothèse, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

2) Par l'absurde, supposons que $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ possède un plus grand élément n . Dans ce cas $2n|n$ car $2n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, donc $n = 2kn$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Forcément $n = 0$, sans quoi $k = \frac{1}{2}$ ne serait pas entier. Nous obtenons bien une contradiction car $0 \notin \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ alors que, par hypothèse, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

3.4 BORNES INFÉRIEURES/SUPÉRIEURES

Définition (Borne supérieure/inférieure) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre et $\mathcal{A}$ une partie de E .

- **S'il existe**, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$ pour $\preccurlyeq$ est appelé **la borne supérieure** de $\mathcal{A}$ (pour $\preccurlyeq$) et noté $\sup \mathcal{A}$. Pour résumer, on dit souvent que $\sup \mathcal{A}$, s'il existe, est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$.
- **S'il existe**, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de $\mathcal{A}$ pour $\preccurlyeq$ est appelé **la borne inférieure** de $\mathcal{A}$ (pour $\preccurlyeq$) et noté $\inf \mathcal{A}$. Pour résumer, on dit souvent que $\inf \mathcal{A}$, s'il existe, est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$.

Explication

- La notion de plus grand/petit élément d'une partie $\mathcal{A}$ était contraignante car elle contenait une condition d'appartenance à $\mathcal{A}$. Avec la notion de borne supérieure/inférieure, on essaie précisément d'assouplir cette contrainte. La différence essentielle entre les plus grands/petit éléments et les bornes supérieures/inférieures d'une partie $\mathcal{A}$, c'est donc que les bornes supérieures/inférieures n'appartiennent pas forcément à $\mathcal{A}$.
- En tant que plus petit (resp. grand) élément, la borne supérieure (resp. inférieure) de $\mathcal{A}$ est unique — si elle existe — et c'est pourquoi on a bien le droit de la noter $\sup \mathcal{A}$ (resp. $\inf \mathcal{A}$) sans ambiguïté.

Attention ! La borne supérieure/inférieure n'existe pas toujours.

Théorème (Lien entre les plus grands/petits éléments et les bornes supérieures/inférieures) Soient $\preccurlyeq$ une relation d'ordre et $\mathcal{A}$ une partie de E . Si $\mathcal{A}$ possède un plus grand (resp. petit) élément pour $\preccurlyeq$, alors $\mathcal{A}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) pour $\preccurlyeq$ et on a :

$$\sup \mathcal{A} = \max \mathcal{A} \quad (\text{resp. } \inf \mathcal{A} = \min \mathcal{A}).$$

Démonstration Contentons-nous du cas des bornes supérieures. Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$. Nous devons montrer que $\mathcal{M}$ possède un plus petit élément — alors $\mathcal{A}$ possédera une borne supérieure — et qu'en fait ce plus petit élément est $\max \mathcal{A}$ — on aura donc $\sup \mathcal{A} = \max \mathcal{A}$. Il suffit de vérifier deux choses :

- 1) que $\max \mathcal{A} \in \mathcal{M}$: or par définition, $\max \mathcal{A}$ est un majorant de $\mathcal{A}$;
- 2) que $\max \mathcal{A}$ est un minorant de $\mathcal{M}$: or par définition $\max \mathcal{A} \in \mathcal{A}$. ■

Exemple L'intervalle $\mathbb{R}_+$ ne possède pas de borne supérieure car il n'est pas majoré. En revanche, parce que 0 en est le plus petit élément, 0 en est aussi la borne inférieure.

Exemple Nous avons vu que $[0, 1[$ n'avait pas de plus grand élément, mais cela dit il admet 1 pour borne supérieure.

En effet Pour montrer que 1 est la borne supérieure de $[0, 1[$, nous allons montrer en deux temps : 1) que 1 majore $[0, 1[$; puis 2) qu'aucun réel strictement inférieur à 1 ne majore $[0, 1[$. Cela prouvera bien que 1 est le plus petit majorant de $[0, 1[$.

- 1) Evidemment, 1 majore $[0, 1[$.
- 2) Soit $x \in]-\infty, 1[$. Montrons que x ne majore pas $[0, 1[$. Cela revient à montrer que $[0, 1[$ contient un élément t strictement supérieur à x . Si $x < 0$, alors on peut poser par exemple $t = 0$; et si $x \in [0, 1[$, alors comme $\frac{x+1}{2} \in [0, 1[$, on peut poser $t = \frac{x+1}{2}$. Dans les deux cas, on a trouvé un élément t qui convient.

Exemple Pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$, « borne supérieure » et « plus petit commun multiple (PPCM) » d'une part, et « borne inférieure » et « plus grand commun diviseur (PGCD) » d'autre part sont des expressions synonymes.

Ainsi : $\inf \{6, 8, 10\} = \text{PGCD}(6, 8, 10) = 2$ et $\sup \{6, 8, 10\} = \text{PPCM}(6, 8, 10) = 120$.

En effet Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$, on appelle *plus grand commun diviseur* de $\mathcal{A}$ tout entier naturel d tel que :

- (i) d est un diviseur de $\mathcal{A}$, i.e. d divise tout élément de $\mathcal{A}$: $\forall a \in \mathcal{A}, d|a$
(bref, d est un minorant de $\mathcal{A}$) ;
- (ii) d est le plus grand des diviseurs de $\mathcal{A}$: $\forall \delta \in \mathbb{N}, \left(\forall a \in \mathcal{A}, \delta|a \right) \implies \delta|d$
(bref, d majore l'ensemble des minorants de $\mathcal{A}$).

On retrouve bien ainsi la définition de la borne inférieure de $\mathcal{A}$ comme plus grand élément de l'ensemble des minorants de $\mathcal{A}$. On peut procéder de même avec la notion de PPCM. Nous reviendrons sur ces notions dans un prochain chapitre.

4 DEUX PROPRIÉTÉS IMPORTANTES DE $\mathbb{N}$ POUR $\leq$

*** **Attention !** On s'intéresse ici à la **relation d'ordre naturelle** $\leq$ sur $\mathbb{N}$ — et non à la relation de divisibilité.

Théorème Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Démonstration Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{N}$. Nous voulons montrer que $\mathcal{A}$ possède un plus petit élément. Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}$ n'en possède pas. Nous allons montrer par récurrence que $\mathcal{A}$ est minorée par n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis nous en tirerons une contradiction.

- **Initialisation :** $\mathcal{A}$ est minorée par 0 car toute partie de $\mathbb{N}$ l'est.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{A}$ minorée par n . Comme par hypothèse $\mathcal{A}$ ne possède pas de plus petit élément, forcément $n \notin \mathcal{A}$, et du coup $n < a$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Mais ceci revient à dire, **parce que nous travaillons avec des entiers**, que $n + 1 \leq a$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Bref, $\mathcal{A}$ est minorée par $n + 1$.

Nous venons donc de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathcal{A}, n \leq a$. Par hypothèse $\mathcal{A}$ est non vide, donc nous pouvons nous en donner un élément a_0 . Alors en particulier $a_0 + 1 \leq a_0$ — contradiction. ■

Corollaire Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Démonstration Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Par hypothèse, l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{N}$ est non vide. En vertu du théorème précédent, il possède donc un plus petit élément m .

- Supposons d'abord que $m = 0$. Alors $a \leq m = 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}$, et comme $a \in \mathbb{N}$, $a = 0$. Puisque $\mathcal{A}$ est non vide, cela montre que $\mathcal{A} = \{0\}$, et donc $\mathcal{A}$ admet 0 pour plus grand élément.
- Supposons à présent $m \neq 0$, donc que $m - 1 \in \mathbb{N}$. Comme $m = \min \mathcal{M}$, $m - 1$ ne majore pas $\mathcal{A}$, donc $m - 1 < a$ pour un certain $a \in \mathcal{A}$. Mais l'**inégalité d'entiers** $m - 1 < a \leq m$ est en fait une **égalité** : $m = a$. Finalement, m majore $\mathcal{A}$ **et** $m \in \mathcal{A}$ puisque $m = a$, donc $\mathcal{A}$ admet m pour plus grand élément. ■

5 LA RELATION D'ORDRE NATURELLE SUR $\mathbb{R}$ ET L'ENSEMBLE $\bar{\mathbb{R}}$

Le résultat suivant est en principe bien connu...

Théorème (Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication) Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $bc \leq ac$.
- Si $0 < a \leq b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

On officialise à présent l'adjonction de deux éléments $-\infty$ et ∞ à l'ensemble des réels.

Définition (Droite achevée $\bar{\mathbb{R}}$) On appelle *droite achevée* $\bar{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ dans lequel les symboles nouveaux $-\infty$ et ∞ sont distincts et régis par les lois suivantes :

- **Prolongement de l'ordre :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < \infty$.
- **Prolongement de l'addition :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x + \infty = \infty + x = \infty$ et $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
et : $\infty + \infty = \infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- **Prolongement de la multiplication :** $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$ et pour tout $x \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$:
$$x \times \infty = \infty \times x = \begin{cases} \infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ \infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

*** **Attention !** Cette définition ne donne aucun sens aux expressions $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\infty \times 0$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

5.1 LA PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE/INFÉRIEURE

⚡ ⚡ ⚡ Explication

- Le résultat qui suit est **UNE PROPRIÉTÉ ESSENTIELLE DE L'ENSEMBLE DES RÉELS**. Sa démonstration dépend de la façon dont on construit cet ensemble à partir de $\mathbb{Q}$. Pour nous qui admettons naïvement l'existence des nombres réels, une telle démonstration est sans importance. En un sens en tout cas, **toute l'analyse est dans ce théorème**. Directement ou non, c'est de lui que nous allons déduire tous les grands théorèmes d'analyse au programme : théorème de la limite monotone pour les suites et les fonctions, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment par une fonction continue, théorème de Heine, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

- Le problème est simple : **déterminer quelles parties de $\mathbb{R}$ possèdent une borne supérieure/inférieure (dans $\mathbb{R}$)**.

Le cas de l'ensemble vide se traite à part : $\emptyset$ admet tout réel pour majorant/minorant, donc comme $\mathbb{R}$ n'est pas majoré/minoré (dans $\mathbb{R}$), $\emptyset$ ne possède pas de borne supérieure/inférieure (dans $\mathbb{R}$).

Ensuite, évidemment, si une partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure/inférieure (dans $\mathbb{R}$), cette partie est aussi majorée/minorée. Et réciproquement ? Toute partie non vide majorée/minorée de $\mathbb{R}$ possède-t-elle une borne supérieure/inférieure ? La réponse est **OUI**.

PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE/INFÉRIEURE :

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$).
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure (dans $\mathbb{R}$).

⚡⚡⚡ Attention ! « Propriété de la borne supérieure/inférieure » est une marque déposée : c'est un nom de théorème sur les réels. Rien à voir avec « une » propriété générale des bornes supérieures/inférieures, et encore moins avec leur définition !

🔧 🔧 🔧 En pratique La propriété de la borne supérieure/inférieure est un résultat d'**existence**, mais ne donne aucun renseignement sur la valeur des bornes en question. Pour cette raison, elle n'est utilisée que dans des contextes théoriques dans lesquels on ne connaît pas à l'avance ces valeurs.

En réalité, c'est dans $\bar{\mathbb{R}}$ que la propriété de la borne supérieure/inférieure gagne à être énoncée, tant elle y devient simple.

Théorème (Propriété de la borne supérieure/inférieure dans $\bar{\mathbb{R}}$) Toute partie de $\bar{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure (dans $\bar{\mathbb{R}}$).

De plus, si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée/minorée **dans $\mathbb{R}$** , alors sa borne supérieure/inférieure dans $\mathbb{R}$ et sa borne supérieure/inférieure dans $\bar{\mathbb{R}}$ sont égales.

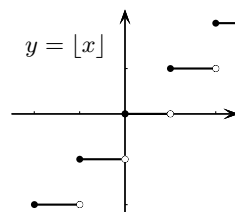
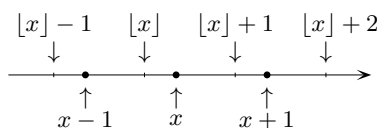
⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Merci $\bar{\mathbb{R}}$! « **Toute** partie de $\bar{\mathbb{R}}$... » L'énoncé dans $\mathbb{R}$ était plus compliqué parce qu'en un sens $\mathbb{R}$ est incomplet : il lui manque des extrémités. Qu'on lui en rajoute et le monde s'éclaire.

Exemple

- Le segment $[0, 1]$, partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ **et** dans $\bar{\mathbb{R}}$, et elles valent 1 toutes les deux. Il est cependant idiot d'utiliser ici l'artillerie lourde de la propriété de la borne supérieure : parce qu'on s'attend à ce que cette borne soit 1, il suffit de le **vérifier**. Le réel 1 étant le plus grand élément de $[0, 1]$, c'est aussi sa borne supérieure.
- Dans $\bar{\mathbb{R}}$, $\sup \emptyset = -\infty$ car le plus petit élément de l'ensemble des majorants de $\emptyset$, qui est $\bar{\mathbb{R}}$ tout entier, est $-\infty$.
- Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ne possède pas de borne supérieure car il n'est pas majoré, mais dans $\bar{\mathbb{R}}$, $\sup \mathbb{R}_+$ existe et vaut ∞ .

Théorème (Partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On l'appelle la *partie entière* de x et on le note $\lfloor x \rfloor$. Cet entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .



⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Le résultat paraît évident mais maintenant on sait d'où il sort : de la propriété de la borne supérieure.

Démonstration

- **Unicité** : Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq x < m+1$ et $n \leq x < n+1$. Sommons les inégalités $m \leq x < m+1$ et $-n-1 < -x \leq -n$: $m-n-1 < 0 < m-n+1$, ou encore $-1 < m-n < 1$. Or $m-n$ est un **entier**, donc $m-n=0$, i.e. $m=n$.

- **Existence dans le cas positif** : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble $X = \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (car $0 \in X$) et majorée par x , donc possède une borne supérieure en vertu de la propriété de la borne supérieure, que nous noterons $\lfloor x \rfloor$. Par définition, comme voulu : $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Bien sûr $\lfloor x \rfloor - 1$ n'est pas un majorant de X puisque $\lfloor x \rfloor$ en est le plus petit. Du coup $\lfloor x \rfloor - 1 < n$ pour un certain $n \in X$. Soit $m \in X$. Si $m > n$, alors en fait $m \geq n+1$ donc $m > \lfloor x \rfloor$ — ce qui est faux car $\lfloor x \rfloor$ majore X , donc en fait $m \leq n$. Tout ceci prouve que $n = \max X = \sup X = \lfloor x \rfloor$. En particulier, comme n , $\lfloor x \rfloor$ est un entier : le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Enfin, forcément, $x < \lfloor x \rfloor + 1$. Dans le cas contraire — $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x$ — $\lfloor x \rfloor + 1$ serait un élément de X strictement supérieur à $\lfloor x \rfloor$, alors que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand élément de X .

- **Existence dans le cas négatif** : Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. Dans le cas où x est entier, on peut poser $\lfloor x \rfloor = x$ car alors clairement $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Dans le cas où x n'est pas entier, posons $\lfloor x \rfloor = -\overbrace{\lfloor -x \rfloor}^{\geq 0} - 1$ — on s'appuie donc sur le cas positif déjà traité. Multiplions l'inégalité $\lfloor -x \rfloor \leq -x < \lfloor -x \rfloor + 1$ par -1 : $-\lfloor -x \rfloor - 1 < x \leq -\lfloor -x \rfloor$, ou encore $\lfloor x \rfloor < x \leq \lfloor x \rfloor + 1$. Comme enfin x n'est pas entier : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ (changement strict/large). ■

Exemple $\lfloor 11 \rfloor = 11$, $\lfloor 5,2 \rfloor = 5$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$, mais attention : $\lfloor -7,3 \rfloor = -8$ (et non pas -7).

5.2 INTERVALLES DE $\bar{\mathbb{R}}$

Rappelons que, par définition, a et b étant des éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ — éventuellement $\pm\infty$ — on pose :

$$[a, b] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} / a \leq x \leq b\} \quad (\text{intervalle fermé}), \quad [a, b[= \{x \in \bar{\mathbb{R}} / a \leq x < b\} \quad (\text{intervalle semi-ouvert à droite}),$$

$$]a, b] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} / a < x \leq b\} \quad (\text{intervalle semi-ouvert à gauche}) \quad \text{et} \quad]a, b[= \{x \in \bar{\mathbb{R}} / a < x < b\} \quad (\text{intervalle ouvert}).$$

Pour a et b réels, $[a, b]$ est aussi appelé un *segment*. Ces ensembles sont tous appelés des intervalles, mais du coup la notion d'intervalle vous a été définie jusqu'ici en **quatre** cas. N'est-il pas possible d'en donner **une** définition d'un seul tenant ? C'est l'objectif de ce paragraphe, que nous réinvestirons plus tard quand nous démontrerons le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition (Intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$) On appelle *intervalle* (de $\bar{\mathbb{R}}$) toute partie I de $\bar{\mathbb{R}}$ telle que :

$$\forall x, y, t \in \bar{\mathbb{R}}, \quad \left(x \in I \text{ et } y \in I \text{ et } x \leq t \leq y \right) \implies t \in I.$$

☞ ☞ ☞ **Explication** Un intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$ est donc une partie I de $\bar{\mathbb{R}}$ qui contient tous les segments dont les extrémités sont dans I , ou encore qui contient toutes les « valeurs intermédiaires » des points qu'elle contient.

Exemple Pour tous $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont des intervalles au sens de la définition précédente.

En effet Contentons-nous du cas de l'ensemble $[a, b]$. Soient $x, y, t \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $x \in [a, b]$, $y \in [a, b]$ et $x \leq t \leq y$. Nous devons montrer que $t \in [a, b]$. Rien de plus facile : $a \leq x \leq t \leq y < b$.

Théorème (Caractérisation des intervalles de $\bar{\mathbb{R}}$) Les intervalles de $\bar{\mathbb{R}}$ sont exactement toutes les parties de $\bar{\mathbb{R}}$ ayant l'une des formes $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ pour certains $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$.

☞ ☞ ☞ **Explication**

- L'ensemble vide est un intervalle. Il figure dans cette liste sous la forme, par exemple, de l'intervalle $[0, 0[$.
- Ce théorème nous parle des intervalles de $\bar{\mathbb{R}}$, ce qui donne un sens à des intervalles comme $[-\infty, 0]$ ou $[1, \infty]$, mais bien sûr en pratique ce sont les intervalles de $\mathbb{R}$ qui nous intéressent.

Démonstration Nous avons vu plus haut que les $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont bien tous des intervalles de $\bar{\mathbb{R}}$. Et réciproquement ? Soit I un intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$. La propriété de la borne inférieure/supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$ montre que I possède une borne inférieure a et une borne supérieure b . Plusieurs cas doivent être distingués.

- **Cas où $a \in I$ et $b \in I$:** Montrons que $I = [a, b]$.
 - 1) Montrons que $[a, b] \subseteq I$. Soit $x \in [a, b]$. Alors $a \leq x \leq b$ avec $a \in I$ et $b \in I$, donc comme I est un intervalle, $x \in I$.
 - 2) Montrons que $I \subseteq [a, b]$. Soit $x \in I$. Comme a minore I et b majore I , $a \leq x \leq b$, i.e. $x \in [a, b]$.
- **Cas où $a \in I$ et $b \notin I$:** Montrons que $I = [a, b[$.
 - 1) Montrons que $[a, b[\subseteq I$. Soit $x \in [a, b[$. Comme $x < b$ et $b = \sup I$, x ne majore pas I , donc $x < b'$ pour un certain $b' \in I$. Alors $a \leq x \leq b'$ avec $a \in I$ et $b' \in I$, donc comme I est un intervalle, $x \in I$.
 - 2) Montrons que $I \subseteq [a, b[$. Soit $x \in I$. Comme a minore I et b majore I , $a \leq x \leq b$. Mais $x \in I$ alors que $b \notin I$, donc $a \leq x < b$, i.e. $x \in [a, b[$.
- **Cas où $a \notin I$ et $b \in I$:** Dans ce cas $I =]a, b]$. Adapter le cas précédent.
- **Cas où $a \notin I$ et $b \notin I$:** Montrons que $I =]a, b[$.
 - 1) Montrons que $]a, b[\subseteq I$. Soit $x \in]a, b[$. Comme $a < x$ et $a = \inf I$, x ne minore pas I , donc $a' < x$ pour un certain $a' \in I$. Comme $x < b$ et $b = \sup I$, x ne majore pas I , donc $x < b'$ pour un certain $b' \in I$. Alors $a' \leq x \leq b'$ avec $a' \in I$ et $b' \in I$, donc comme I est un intervalle, $x \in I$.
 - 2) Montrons que $I \subseteq]a, b[$. Soit $x \in I$. Comme a minore I et b majore I , $a \leq x \leq b$. Mais $x \in I$ alors que $a \notin I$ et $b \notin I$, donc $a < x < b$, i.e. $x \in]a, b[$. ■

Le théorème suivant montre que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels sont enlacés l'un à l'autre de façon tout à fait fusionnelle, comme deux peignes imbriqués l'un dans l'autre.

Théorème Entre deux réels distincts, il existe toujours une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

Démonstration Petit rappel : nous avons montré ailleurs que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Commençons par montrer qu'il existe toujours un rationnel entre deux réels distincts. Soient donc $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x < x'$. Posons $q = \left\lfloor \frac{1}{x' - x} \right\rfloor + 1$. Alors $q \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{x' - x} < q$, ou encore $1 < q(x' - x)$. Posons ensuite $p = \lfloor qx \rfloor + 1$. Alors $p \in \mathbb{Z}$ et $qx < p \leq qx + 1 < qx + q(x' - x) = qx'$, donc $x < \frac{p}{q} < x'$. Nous avons bien trouvé un rationnel $\frac{p}{q}$ entre x et x' .
- Montrons ensuite qu'il existe toujours une infinité de rationnels et d'irrationnels entre deux réels distincts. Soient donc $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x < x'$. D'après le premier point, l'intervalle $]x, x'[$ contient un rationnel r et l'intervalle $]r, x'[$ un rationnel r' .

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $r_n = r + \frac{r' - r}{n}$. Alors r_n est rationnel et comme $r' - r > 0$, $x < r < r_n < r + (r' - r) = r' < x'$. Nous avons bien trouvé une infinité de rationnels entre x et x' .

2) Pour tout $n \geq 2$, posons $x_n = r + (r' - r)\frac{\sqrt{2}}{n}$. Alors x_n est irrationnel car s'il était rationnel, $\sqrt{2} = n \frac{x_n - r}{r' - r}$ le serait aussi et c'est faux. Par ailleurs $x < r < x_n < r + (r' - r) \times 1 = r' < x'$ car $r' - r > 0$ et $\frac{\sqrt{2}}{n} < 1$. Nous avons bien trouvé une infinité d'irrationnels entre x et x' . ■

5.3 APPLICATION À L'ÉTUDE DES FONCTIONS

Définition (Fonctions majorée/minorée/bornée) Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

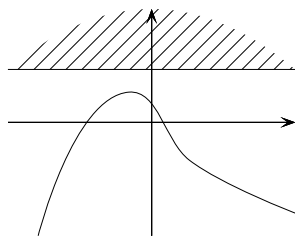
- On dit que f est *majorée sur $\mathcal{A}$* si $f(\mathcal{A})$ l'est pour la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Cela revient à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{A}, f(x) \leq M$.

Un tel réel M est appelé un *majorant de f sur $\mathcal{A}$* . On dit aussi que f est *majorée par M sur $\mathcal{A}$* ou que M *majore f sur $\mathcal{A}$* .

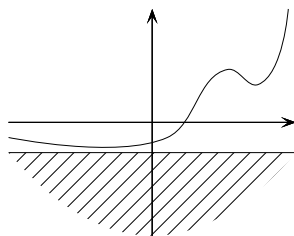
- On dit que f est *minorée sur $\mathcal{A}$* si $f(\mathcal{A})$ l'est pour la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Cela revient à dire qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{A}, f(x) \geq m$.

Un tel réel m est appelé un *minorant de f sur $\mathcal{A}$* . On dit aussi que f est *minorée par m sur $\mathcal{A}$* ou que m *minore f sur $\mathcal{A}$* .

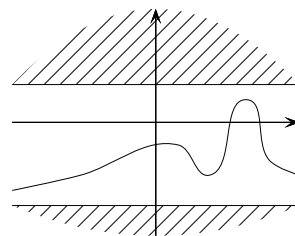
- On dit que f est *bornée sur $\mathcal{A}$* si f est à la fois majorée et minorée sur $\mathcal{A}$. On peut montrer que cela revient à dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \mathcal{A}, |f(x)| \leq K$.



Majorée non minorée



Minorée non majorée



Bornée

××× Attention !

- Si f est majorée/minorée, f possède une infinité de majorants/minorants.
- Quand on part à la recherche d'un majorant ou d'un minorant d'une fonction, ne **JAMAIS** choisir un réel qui dépend de la variable ! En d'autres termes, si vous voulez majorer $f(x)$, ne choisissez pas un M qui dépend de x : votre M doit majorer $f(x)$ **indépendamment de x** .
- Le contraire de « majorée » n'est pas « minorée ». En général, les fonctions ne sont ni majorées ni minorées.

Définition (Maximum/minimum d'une fonction) Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est le *maximum de f sur $\mathcal{A}$* si M est le maximum de $f(\mathcal{A})$ pour la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Cela revient à dire que M est un majorant de f sur $\mathcal{A}$ et qu'il existe $c \in \mathcal{A}$ tel que $f(c) = M$.

S'il existe, le maximum de f sur $\mathcal{A}$, égal par définition à $\max f(\mathcal{A})$, est noté $\max_{\mathcal{A}} f$ ou $\max_{x \in \mathcal{A}} f(x)$.

- Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est le *minimum de f sur $\mathcal{A}$* si m est le minimum de $f(\mathcal{A})$ pour la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Cela revient à dire que m est un minorant de f sur $\mathcal{A}$ et qu'il existe $c \in \mathcal{A}$ tel que $f(c) = m$.

S'il existe, le minimum de f sur $\mathcal{A}$, égal par définition à $\min f(\mathcal{A})$, est noté $\min_{\mathcal{A}} f$ ou $\min_{x \in \mathcal{A}} f(x)$.

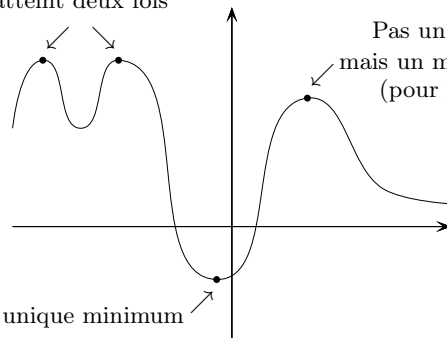
××× Attention !

Les *extrema* d'une fonction, i.e. ses maxima et ses minima, sont chacun uniques, mais leurs valeurs respectives peuvent être atteintes en plusieurs points.

Exemple

La fonction sinus possède un maximum et un minimum, respectivement 1 et -1 . Tous deux sont atteints une infinité de fois : en tous les points de $2\pi\mathbb{Z}$ pour le maximum, en tous les points de $2\pi\mathbb{Z} + \pi$ pour le minimum.

Un unique maximum
atteint deux fois



Pas un maximum
mais un maximum *local*
(pour plus tard)

Un unique minimum
atteint une fois

Définition (Borne supérieure/inférieure d'une fonction) Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f possède une *borne supérieure sur $\mathcal{A}$* si $\sup f(\mathcal{A})$ existe.

Si elle existe, la borne supérieure de f sur $\mathcal{A}$, égale par définition à $\sup f(\mathcal{A})$, est notée $\sup_{\mathcal{A}} f$ ou $\sup_{x \in \mathcal{A}} f(x)$.

- On dit que f possède une *borne inférieure sur $\mathcal{A}$* si $\inf f(\mathcal{A})$ existe.

Si elle existe, la borne inférieure de f sur $\mathcal{A}$, égale par définition à $\inf f(\mathcal{A})$, est notée $\inf_{\mathcal{A}} f$ ou $\inf_{x \in \mathcal{A}} f(x)$.

🐼 🐼 🐼 Explication

La grande différence entre les extrema et les bornes supérieures/inférieures, c'est que les extrema sont forcément atteints alors que les bornes supérieures/inférieures ne le sont pas nécessairement.

