1) Pour tout entier naturel n, on définit la propriété P_n : « $u_n \geq \sqrt{n}$ »

Montrons cette propriété par récurrence.

- Initialisation : P_0 est vraie par hypothèse.
- Hérédité : Soit $n \in N$. Si P_n est vraie, alors $u_n \geq \sqrt{n} \geq 0$. Ainsi, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \geq \sqrt{n+1}$ donc P_{n+1} est vraie.

L'axiome de récurrence nous permet de conclure que $\forall n \in N, u_n \geq \sqrt{n}$.

2) a) $\forall x \in R_+, 1+x-2\sqrt{x} = (1-\sqrt{x})^2 \geq 0$ d'où le résultat.

b) Pour tout entier naturel n, on définit la propriété P_n : « $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$ »

Montrons cette propriété par récurrence.

- Initialisation : P_0 est vraie car $u_0 \leq 0 + \dfrac{u_0}{2^0}$
- Hérédité : Soit $n \in N$. Si P_n est vraie, alors $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} \leq \dfrac{1}{2}(n+1+u_n) \leq \dfrac{1}{2}(2n+1+\dfrac{u_0}{2^n})$ (hypothèse de récurrence)

On en déduit que $u_{n+1} \leq n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{u_0}{2^{n+1}} \leq n+1+\dfrac{u_0}{2^{n+1}}$ donc P_{n+1} est vraie.

L'axiome de récurrence nous permet de conclure que $\forall n \in N, u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

D'après les résultats précédents, on a $0 \leq \dfrac{\sqrt{n-1}}{n^2} \leq \dfrac{u_{n-1}}{n^2} \leq \dfrac{n-1+\dfrac{u_0}{2^{n-1}}}{n^2}$. Par passage à la limite, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n^2} = 0$

c) Toujours d'après les résultats précédents, on a $0 \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n} \leq \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{u_{n-1}}{n^2}}$. Par passage à la limite, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$

Pour $n \in N^*$, on a $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}} \leq \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n-1}}$. Par passage à la limite, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.

Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

3) $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}+1)}$. En utilisant le fait que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0$.

On a $u_n - u_{n-1} = w_n - w_{n-1} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + 0 = 0$.

Cette limite se traduit par :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in N / \forall n \in N, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon$.

Or $|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow u_{n-1} - \varepsilon \leq u_n \leq u_{n-1} + \varepsilon$. Le résultat s'en déduit en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

On a $u_n - u_{n-1} = \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}} = \dfrac{1+u_n - u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}$. $u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de $1+u_n - u_{n-1}$.

Or pour $n \geq N_0, 1+u_n - u_{n-1} \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ .La suite (u_n) est donc croissante à partir de N_0 .

5) suite :=proc(n)
```
local s,i ;
s :=1 ;
for i to n do s :=sqrt(i+s);od;
print(s);
end;
```