

Exercice 1 : (Brevet National 2010)

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- choisir un nombre de départ
- multiplier ce nombre par (-2)
- ajouter 5 au produit
- multiplier le résultat par 5
- écrire le résultat obtenu.

- 1) a) Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5.
b) Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on ?
- 2) Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?

3) Arthur prétend que, pour n'importe quel nombre de départ, l'expression $(x - 5)^2 - x^2$ permet d'obtenir le résultat du programme de calcul. A-t-il raison ?

Exercice 2 : (Brevet Nationale 2008)

- choisir un nombre de départ
- multiplier ce nombre par 3
- ajouter le carré du nombre choisi
- multiplier par 2
- écrire le résultat obtenu

- 1) Montrer que si on choisit le nombre 10, le résultat obtenu est 260.
- 2) Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :
 - le nombre choisi est -5
 - le nombre choisi est $\frac{2}{3}$
 - le nombre choisi est $\sqrt{5}$

3) Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ?

Exercice 3 : (Brevet National 2007)

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- choisir un nombre de départ
- lui ajouter 4
- multiplier la somme par le nombre de départ
- ajouter 4 à ce produit
- écrire le résultat obtenu.

- 1) Vérifier que, lorsque le nombre de départ est -2, on obtient 0.
- 2) Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi au départ est 5.

3) a) Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un autre nombre.

b) En est-il toujours ainsi lorsque l'on choisit un nombre entier au départ de ce programme ? Justifier.

4) On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quel(s) nombre(s) peut-on choisir au départ ?

Problème :

Programme calcul n°1 :

- choisir un nombre de départ
- prendre son double
- ajouter 4
- calculer le carré du résultat.
- écrire le résultat obtenu.

Programme calcul n°2 :

- choisir un nombre de départ
- prendre son double
- ajouter 4
- multiplier le résultat par le triple du nombre de départ
- prendre l'opposé du résultat.
- écrire le résultat obtenu.

1^{ère} partie : Etude des programmes de calcul.

- 1) Effectuer chaque programme de calcul en prenant 5 comme nombre de départ.
- 2) Soit x le nombre de départ.
 - a) Exprimer le résultat final en fonction de x pour le programme de calcul n°1. On notera ce résultat $f(x)$.
 - b) Exprimer le résultat final en fonction de x pour le programme de calcul n°2. On notera ce résultat $g(x)$.

2^{ième} partie : Cas d'égalité des deux programmes.

- 1) Factoriser $E = (2x + 4)^2 + 3x(2x + 4)$.
- 2) Montrer que déterminer les nombres pour lesquels les deux programmes de calcul donnent le même résultat revient à résoudre l'équation $(2x + 4)^2 + 3x(2x + 4) = 0$.
- 3) Résoudre cette équation.
- 4) Pour quels nombres les deux programmes de calcul donnent-ils le même résultat ?

Corrigé 1 :

1) a) Il suffit de suivre le programme de calcul :

$$2 \times (-2) = -4$$

$$-4 + 5 = 1$$

$$1 \times 5 = 5$$

Si le nombre de départ est 2, on obtient 5.

b) $3 \times (-2) = -6$

$$-6 + 5 = -1$$

$$(-1) \times 5 = -5$$

Si le nombre de départ est 3, on obtient -5.

2) Soit x le nombre choisi au départ.

On a $(-2x + 5) \times 5 = -10x + 25$.

Si le nombre de départ est x , on obtient $-10x + 25$.

Réolvons $-10x + 25 = 0$

$$-10x + 25 = 0$$

$$10x = 25$$

$$x = \frac{25}{10}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Pour que le résultat obtenu soit 0, il faut donc choisir $\frac{5}{2}$.

3) On a $(x - 5)^2 - x^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 - x^2 = -10x + 25$. Arthur a donc raison.

Corrigé 2 :

1) Il suffit de suivre le programme de calcul :

$$10 \times 3 = 30$$

$$30 + 10^2 = 30 + 100 = 130$$

$$130 \times 2 = 260$$

Si le nombre de départ est 10, on obtient 260.

R. Flouret

2) $(-5) \times 3 = -15$

$$-15 + (-5)^2 = -15 + 25 = 10$$

$$10 \times 2 = 20$$

Si le nombre de départ est -5, on obtient 20.

$$\frac{2}{3} \times 3 = 2$$

$$2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 + \frac{2^2}{3^2} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{18}{9} + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$$

$$\frac{22}{9} \times 2 = \frac{44}{9}$$

Si le nombre de départ est $\frac{2}{3}$, on obtient $\frac{44}{9}$.

$$\sqrt{5} \times 3 = 3\sqrt{5}$$

$$3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 3\sqrt{5} + 5$$

$$(3\sqrt{5} + 5) \times 2 = 6\sqrt{5} + 10$$

Si le nombre de départ est $\sqrt{5}$, on obtient $6\sqrt{5} + 10$.

3) Soit x le nombre de départ.

$$\text{On a } (x \times 3 + x^2) \times 2 = (3x + x^2) \times 2 = 2x^2 + 6x.$$

$$\text{Résolvons } 2x^2 + 6x = 0$$

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$x(2x + 6) = 0$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul.

$$\text{Donc soit } x = 0 \quad \text{soit } 2x + 6 = 0$$

$$2x = -6$$

$$x = \frac{-6}{2}$$

$$x = -3$$

Pour que le résultat obtenu soit 0, on peut choisir 0 ou -3.

Corrigé 3 :

1) Il suffit de suivre le programme de calcul :

$$-2 + 4 = 2$$

$$2 \times (-2) = -4$$

$$-4 + 4 = 0$$

Si le nombre de départ est -2, on obtient 0.

2) $5 + 4 = 9$

$$9 \times 5 = 45$$

$$45 + 4 = 49$$

Si le nombre de départ est 5, on obtient 49.

3) a) Essayons avec 2. On obtient 16 c'est-à-dire 4^2 .

Essayons avec 3. On obtient 25, c'est-à-dire 5^2 .

b) Soit x le nombre de départ.

Le programme nous donne : $(x + 4) \times x + 4$.

$$\text{On a } (x + 4) \times x + 4 = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x + 2)^2$$

Ainsi, on obtient toujours un résultat qui peut s'écrire sous la forme d'un carré.

4) Il faut résoudre $(x + 2)^2 = 1$

$$(x + 2)^2 = 1$$

$$(x + 2)^2 - 1 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 1^2 = 0$$

$$(x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul.

On a donc soit $x + 1 = 0$ soit $x + 3 = 0$

$$x = -1$$

$$x = -3$$

Ainsi, pour obtenir 1 comme résultat, on peut choisir les nombres -1 et -3 .

Remarque : Dans la question, on remarquera qu'il est écrit : « Quels nombres ... ». Si vous n'en trouvez qu'un, c'est qu'il y a un problème quelque part !

Corrigé Problème :

1^{ère} partie :

1) Programme n°1 :

$$5 \times 2 = 10$$

$$10 + 4 = 14$$

$$14^2 = 196$$

Si le nombre de départ est 5, on obtient 196.

Programme n°2 :

$$5 \times 2 = 10$$

$$10 + 4 = 14$$

$$14 \times 3 \times 5 = 210$$

Si le nombre de départ est 5, on obtient -210.

2) a) On a $(x \times 2 + 4)^2 = (2x + 4)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 4 + 4^2 = 4x^2 + 16x + 16$

On a donc $f(x) = (x + 4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$

b) On a $-[(x \times 2 + 4) \times 3 \times x] = -(2x + 4) \times 3x = -6x^2 - 12x$

On a donc $g(x) = -3x(2x + 4) = -6x^2 - 12x$.

2^{ème} partie :

1) $E = (2x + 4)^2 + 3x(2x + 4)$

$$E = (2x + 4)(2x + 4 + 3x)$$

$$E = (2x + 4)(5x + 4)$$

2) Les deux programmes de calcul donnent le même nombre lorsque $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x)$$

$$(x + 4)^2 = -3x(2x + 4)$$

$$(x + 4)^2 + 3x(2x + 4) = 0$$

On obtient bien le résultat voulu.

3) $(2x + 4)^2 + 3x(2x + 4) = 0$

$(2x + 4)(5x + 4) = 0$ (d'après la question 1)

Pour qu'un produit soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul.

On a donc soit $2x + 4 = 0$

soit $5x + 4 = 0$

$$2x = -4$$

$$5x = -4$$

$$x = \frac{-4}{2}$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

$$x = -2$$

Les solutions de l'équation sont donc -2 et $-\frac{4}{5}$.

4) On en déduit que les deux programmes de calcul donnent le même résultat final lorsque l'on choisit au départ -2 ou $-\frac{4}{5}$.