

Exercice 1 : (Brevet Groupe Nord 2001)

On note $A = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9}$, $B = \left(\frac{2}{3} - 3\right) : \frac{1}{9}$ et $C = \frac{3 - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3} \times 7}$

- a) Calculer A et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible.
- b) Calculer B et donner la réponse sous la forme d'un entier relatif.
- c) Calculer C et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 2 :

Déterminer le PGCD des deux nombres avec l'algorithme d'Euclide. Dire si ces deux nombres sont premiers entre eux.

- a) 569 et 456
- b) 20153 et 11516

Exercice 3 : (Brevet Groupe Nord 2006)

- a) Calculer le PGCD de 1911 et 2499 en précisant la méthode utilisée.
- b) Écrire sous forme irréductible la fraction $\frac{2499}{1911}$.

Exercice 4 : (Brevet Centres Étrangers Nice 2007)

Une association organise une compétition sportive ; 144 filles et 252 garçons se sont inscrits.

L'association désire répartir les inscrits en équipes mixtes. Le nombre de filles doit être le même dans chaque équipe. Le nombre de garçons doit aussi être le même dans chaque équipe.

Tous les inscrits doivent être dans une équipe.

- a) Quel est le nombre maximal d'équipes que cette association peut former ?
- b) Quelle est alors la composition de chaque équipe ?

Exercice 5 :

Inès affirme : « Deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux ».

- 1) a) Étudier des exemples de deux nombres entiers consécutifs (entre 1 et 30) et déterminer leur PGCD.
b) D'après ces exemples, êtes-vous plutôt d'accord avec Inès ?
- 2) Démontrer le résultat qu'affirme Inès.

Corrigé 1 :

$$a) A = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9}$$

$$A = \frac{12}{5} - \frac{21}{45}$$

$$A = \frac{12 \times 9}{5 \times 9} - \frac{21}{45}$$

$$A = \frac{108}{45} - \frac{21}{45}$$

$$A = \frac{108 - 21}{45}$$

$$A = \frac{87}{45}$$

$$A = \frac{29 \times 3}{15 \times 3}$$

$$A = \frac{29}{15}$$

$$b) B = \left(\frac{2}{3} - 3 \right) : \frac{1}{9}$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{3 \times 3}{3} \right) : \frac{1}{9}$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{9}{3} \right) : \frac{1}{9}$$

$$B = \frac{-7}{3} : \frac{1}{9}$$

$$B = \frac{-7}{3} \times \frac{9}{1}$$

$$B = \frac{-7 \times 3 \times 3}{3 \times 1}$$

$$B = -21$$

$$c) C = \frac{3 - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3} \times 7}$$

$$C = \frac{\frac{3 \times 2}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{4 \times 7}{3}}$$

$$C = \frac{\frac{6}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{28}{3}}$$

$$C = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{28}{3}}$$

$$C = \frac{3}{2} \times \frac{3}{28}$$

$$C = \frac{9}{56}$$

Corrigé 2 :

a)

$$569 = 1 \times 456 + 113$$

$$456 = 4 \times 113 + 4$$

$$113 = 28 \times 4 + 1$$

$$4 = 4 \times 1 + 0$$

Dividende	Diviseur	Reste
569	456	113
456	113	4
113	4	1
4	1	0

Le dernier reste non nul est 1. On a donc PGCD(569 ; 456) = 1 et les deux nombres sont donc premiers entre eux.

b)

$$20153 = 1 \times 11516 + 8637$$

$$11516 = 1 \times 8637 + 2879$$

$$8637 = 3 \times 2879 + 0$$

Dividende	Diviseur	Reste
20153	11516	8637
11516	8637	2879
8637	2879	0

Le dernier reste non nul est 2879 donc PGCD(20153 ;11516)=2879 et les deux nombres ne sont pas premiers entre eux.

Corrigé 3 :

a)

		Dividende	Diviseur	Reste
$2499 = 1 \times 1911 + 588$	←	2499	1911	588
$1911 = 3 \times 588 + 147$	←	1911	588	147
$588 = 4 \times 147 + 0$	←	588	147	0

Le dernier reste non nul est 147. On a donc PGCD(2499 ;1911)=147.

b) $\frac{2499}{1911} = \frac{147 \times 17}{147 \times 13} = \frac{17}{13}$

Corrigé 4 :

a) Soit n le nombre d'équipes, x le nombre de filles dans chaque équipe et y le nombre de garçons dans chaque équipe.

On a alors $144 = nx$ et $252 = ny$

n est donc un diviseur commun à 144 et 252.

Comme n doit être maximal, on en déduit que $n = \text{PGCD}(252 ; 144)$.

		Dividende	Diviseur	Reste
$252 = 1 \times 144 + 108$	←	252	144	108
$144 = 1 \times 108 + 36$	←	144	108	36
$108 = 3 \times 36 + 0$	←	108	36	0

Le dernier reste non nul est 36. On en déduit que PGCD(252 ;144)=36 et donc que n=36.

On pourra donc constituer au maximum 36 équipes.

b) On a donc $144 = 36x$ et $252 = 36y$

$$x = \frac{144}{36} \quad y = \frac{252}{36}$$

$$x = 4 \quad y = 7$$

Chaque équipe sera donc constituée de 4 filles et 7 garçons.

R. Flouret

Corrigé 5 :

1) a) 2 et 3 sont bien premiers entre eux, tout comme 5 et 6 ou 25 et 26.

b) L'affirmation d'Inès semble donc être vraie !

2) Soit n un nombre entier. n et $n+1$ sont donc 2 nombres entiers consécutifs.

		Dividende	Diviseur	Reste
$n+1 = 1 \times n + 1$	←	$n+1$	n	1
$n = 1 \times n + 0$	←	n	n	0

Le dernier reste non nul est 1 donc $\text{PGCD}(n+1 ; n) = 1$

On en déduit que deux nombres consécutifs sont toujours premiers entre eux !