

TRIGONOMETRIE REPÉRAGE POLAIRE

I Angles orientés

Remarque

On considère le cercle de centre O et de rayon 1, que l'on appelle cercle trigonométrique.

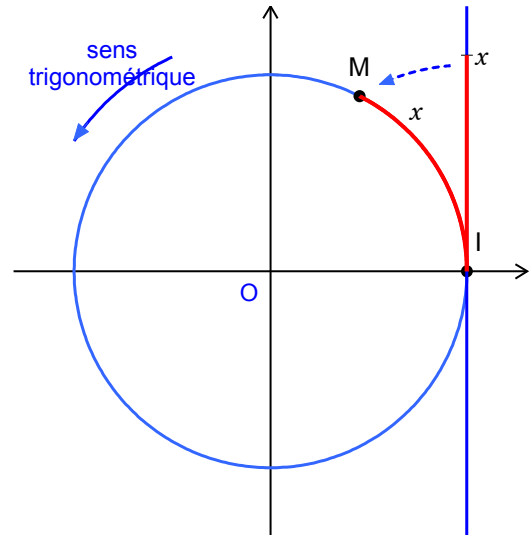
Le périmètre de ce cercle est 2π .

On considère la droite graduée Δ tangente au cercle en I.

Pour un réel x repéré sur la droite Δ , on considère le point M que l'on obtiendrait sur le cercle par "enroulement" de la droite Δ sur le cercle.

On dit que M est l'image sur le cercle du réel x .

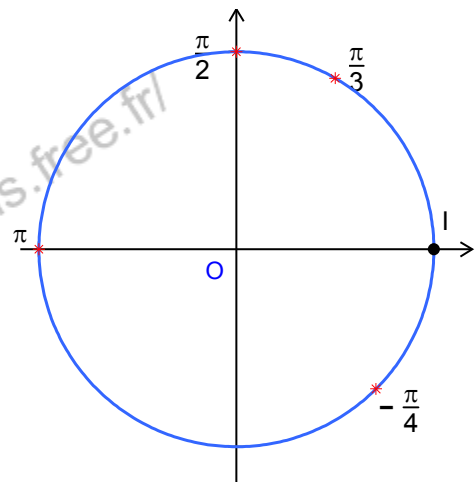
Par convention l'enroulement se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre appelé sens trigonométrique.



Exemples

Le périmètre du cercle de rayon 1 étant égal à 2π ,

- le point correspondant à π est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, un demi-cercle à partir de I.
- le point correspondant à $\frac{\pi}{2}$ est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, la moitié d'un demi-cercle à partir de I.
- le point correspondant à $\frac{\pi}{3}$ est obtenu en parcourant, dans le sens trigonométrique, le tiers d'un demi-cercle à partir de I.
- le point correspondant à $-\frac{\pi}{4}$ est obtenu en parcourant, dans le sens inverse du sens trigonométrique, le quart d'un demi-cercle à partir de I.



Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

0 ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\pi$; 2π

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

$-\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{4}$; 12π ; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{\pi}{12}$; 15π ; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{3}$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

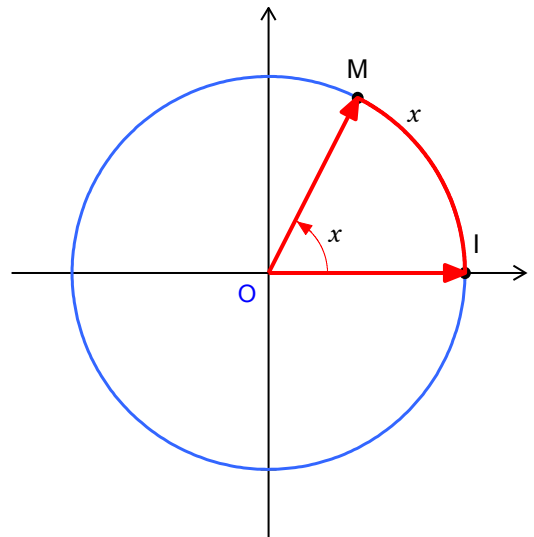
$\frac{4\pi}{3}$; -21π ; $-\frac{9\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{121\pi}{2}$; 1620π

Définition

On considère sur le cercle trigonométrique, le point M image du réel x .

On dit que x est une mesure en radians de l'angle

orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ noté plus simplement $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.



Correspondances

degrés	360°	180°	90°	60°	45°	30°	0
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

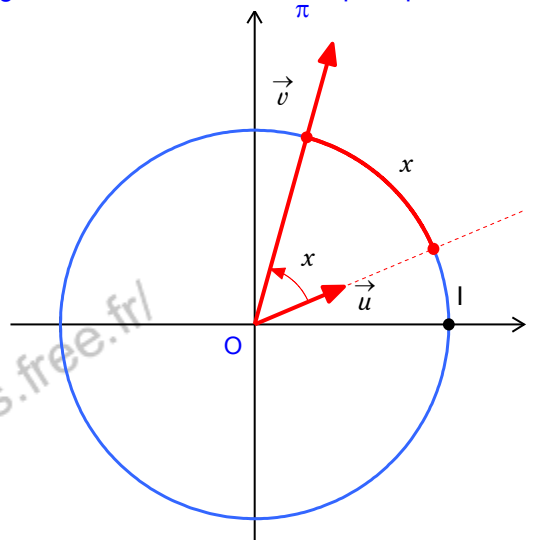
Les mesures d'un angle en degrés et en radians sont proportionnelles.

Le coefficient de proportionnalité est de $\frac{\pi}{180}$ pour passer des degrés aux radians et de $\frac{180}{\pi}$ pour passer des radians aux degrés.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls déterminent un angle orienté noté $(\vec{u}; \vec{v})$.

En considérant un cercle trigonométrique, on définit une mesure x en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.



Remarque

Si k et k' sont des réels strictement positifs, les mesures des angles $(k\vec{u}; k'\vec{v})$ et $(\vec{u}; \vec{v})$ sont identiques.

Propriété (admise)

Soit $(\vec{u}; \vec{v})$ un angle orienté et x une mesure en radians de $(\vec{u}; \vec{v})$.

L'ensemble des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ est l'ensemble des réels $x + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c'est-à-dire qu'un angle est mesuré à un certain nombre de tours de cercle près. (l'entier k représente ce nombre de tours)

L'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ a une et une seule mesure dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.

Remarques

- On assimilera souvent un angle orienté à ses mesures.

Ainsi on pourra écrire $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

on n'écrira jamais $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ qui est une égalité fautive entre deux réels mais $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} [2\pi]$.

- Pour que deux réels x et y soient des mesures du même angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, il faut et il suffit que $y - x$ soit un multiple entier de 2π (c'est-à-dire $y - x = k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
On écrira $y - x = 0 [2\pi]$ ou $y = x [2\pi]$

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Déterminer les mesures principales des angles dont les mesures sont :

$$\frac{7\pi}{6}; \quad \frac{8\pi}{3}; \quad -\frac{3\pi}{2}; \quad \frac{15\pi}{8}; \quad -\frac{10\pi}{3}; \quad \frac{83\pi}{4}; \quad \frac{131\pi}{6}; \quad \frac{253\pi}{12}$$

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 tels que :

$$OM_1 = 2 \quad \text{et} \quad (\vec{i}; \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{4} \qquad OM_2 = 3 \quad \text{et} \quad (\vec{i}; \overrightarrow{OM_2}) = \frac{11\pi}{6}$$

$$OM_3 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (\vec{i}; \overrightarrow{OM_3}) = \frac{3\pi}{4} \qquad OM_4 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad (\vec{i}; \overrightarrow{OM_4}) = \frac{7\pi}{3}$$

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$ (on dit que ABCD est un carré direct).

Déterminer une mesure (en radians) de chacun des angles (aucune justification n'est demandée) :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \quad ; \quad (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BC}) \quad ; \quad (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) \quad ; \quad (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$$

$$(\overrightarrow{CO}; \overrightarrow{DA}) \quad ; \quad (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{BC}) \quad ; \quad (\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{AB}) \quad ; \quad (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{CB})$$

Propriétés (voir [justification 01](#))

- Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, on a :
 $(\vec{u}; \vec{u}) = 0 \quad [2\pi] \quad ; \quad (\vec{u}; -\vec{u}) = \pi \quad [2\pi]$
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$, on a :
 $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) \quad ; \quad (-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) \quad ; \quad (\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \quad [2\pi]$
et si k et k' sont deux réels strictement positifs $(k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
 $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w}) \quad (\text{Relation de Chasles})$

Propriétés (voir [justification 02](#))

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 0 \quad [2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 0 \quad [\pi]$ c'est-à-dire $(\vec{u}; \vec{v}) = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

Déterminer $(\vec{u}; -\vec{v}) \quad ; \quad (-\vec{u}; \vec{v}) \quad ; \quad (\vec{v}; -\vec{u}) \quad ; \quad (-\vec{u}; -\vec{v}) \quad ; \quad \left(-3\vec{v}; \frac{1}{2}\vec{u}\right)$

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

1°) Soit ABC un triangle.

Démontrer que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi \quad [2\pi]$.

2°) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

En déduire que $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Justifier de même que $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

3°) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Soient A', B', C' les milieux respectifs de [BC] ; [AC] ; [AB].

Déterminer $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \quad ; \quad (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BA'}) \quad ; \quad (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB'}) \quad ; \quad (\overrightarrow{A'C}; \overrightarrow{C'A}) \quad ; \quad (\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{C'B})$ (on justifiera)

II Trigonométrie

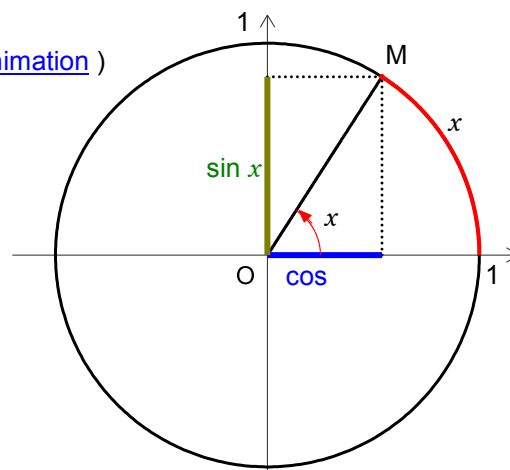
Définition

On dit qu'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est direct lorsque $(\vec{i}; \vec{j}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct, si M est le point du cercle trigonométrique image du réel x ,

- l'abscisse de M est appelée cosinus de x , elle est notée $\cos x$ ou $\cos(x)$.
- l'ordonnée de M est appelée sinus de x , elle est notée $\sin x$ ou $\sin(x)$.

(voir [animation](#))



Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Donner les valeurs de :

$$\cos 0 ; \sin 0 ; \cos \frac{\pi}{2} ; \sin \frac{\pi}{2} ; \cos \pi ; \sin \pi ; \cos \frac{3\pi}{2} ; \sin \frac{3\pi}{2} ; \cos 2\pi ; \sin 2\pi ; \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) ; \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Propriété (voir [démonstration 03](#))

Pour tout réel x , on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(L'expression $\cos^2 x$ désigne le carré de $\cos x$ c'est-à-dire $(\cos x)^2$ et de même $\sin^2 x$ désigne $(\sin x)^2$)

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\cos x = \frac{1}{3}$.

Calculer la valeur de $\sin x$.

x est un réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{4}$.

Calculer la valeur de $\cos x$.

x est un réel tel que $\pi \leq x \leq 2\pi$ et $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Calculer la valeur de $\sin x$.

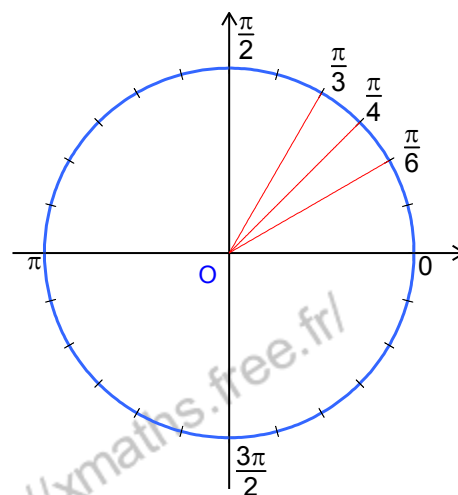
x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\sin x = \sqrt{3}$.

Calculer la valeur de $\cos x$.

Valeurs particulières (voir [démonstration 04](#))

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

(voir [animation](#))



Définition

On appelle fonction cosinus la fonction : $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$

On appelle fonction sinus la fonction : $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$

Propriété (voir [démonstration 05](#))

Pour tout réel x : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π .

Propriété (voir [démonstration 06](#))

Pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.

Propriété (voir [démonstration 07](#))

Pour tout réel x :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

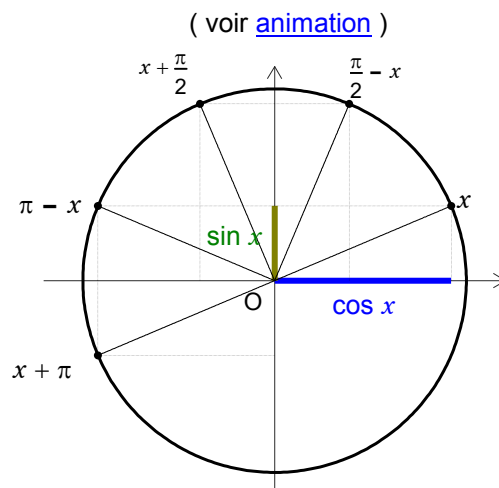
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x \quad ; \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

Remarque

- Il faut savoir retrouver toutes ces égalités à partir du dessin.
- Les relations $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ sont particulièrement importantes car elles permettent de transformer un cosinus en sinus et un sinus en cosinus



Propriété : Formules d'addition (voir [démonstration 08](#))

On a $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, trouver les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad ; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Propriété : Formules de duplication (voir [démonstration 09](#))

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad ; \quad \sin(2x + \pi) \quad ; \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \quad ; \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant les formules de duplication, déterminer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Vérifier que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

Vérifier, pour tous réels a et b les égalités suivantes :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \quad ; \quad \sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin 2a \sin 2b$$

$$[\sin(a+b) + \sin(a-b)]^2 + [\cos(a+b) + \cos(a-b)]^2 = 4 \cos^2 b \quad ; \quad \cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

1°) Déterminer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

2°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x$

Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a dans $\mathbb{R}$ trois solutions.

Déterminer, en utilisant une calculatrice ou un ordinateur, une valeur approchée à 10^{-3} près de chacune des solutions.

3°) Dédurre des question précédentes une valeur approchée de $\cos \frac{\pi}{9}$.

Exercice 18 (voir [réponses et correction](#))

On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ et $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

Calculer les valeurs exactes de $\cos \alpha$; $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\sin 3\alpha$; $\cos 3\alpha$

Propriété (admise)

(voir [animation](#))

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Propriété (voir [démonstration 10](#))

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $(\sin x)' = \cos x$

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $(\cos x)' = -\sin x$

Exercice 19 (voir [réponses et correction](#))

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin 3x \quad ; \quad g(x) = \cos^2 x \quad ; \quad h(x) = -3 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad t(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \cos 3x$$

Tableaux de variations

Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, la fonction cosinus a le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		0		π
$-\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos$	-1		1		-1

Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, la fonction sinus a le tableau de variations suivant :

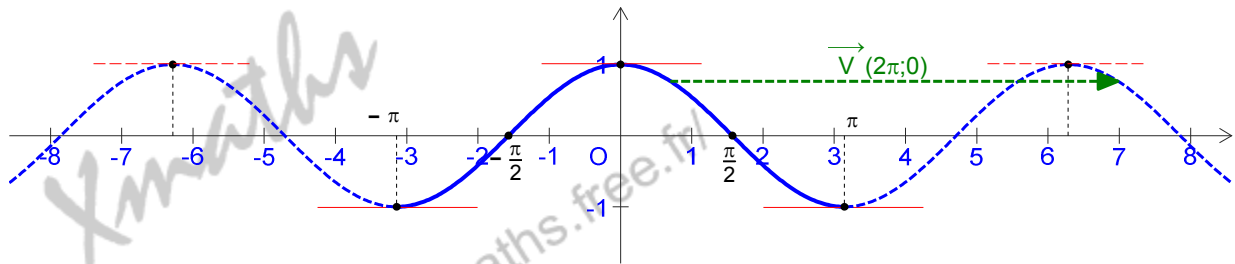
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin$	0		-1		1		0

Représentation graphique de la fonction cosinus

On peut tracer, sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, la courbe représentative de la fonction cosinus.

La fonction cosinus étant une fonction paire, la courbe a pour axe de symétrie l'axe Oy .

On peut ensuite compléter la courbe sur $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est périodique de période 2π . La courbe se complète donc en faisant des translations de vecteur $\vec{V}(2\pi; 0)$ ou $-\vec{V}(-2\pi; 0)$



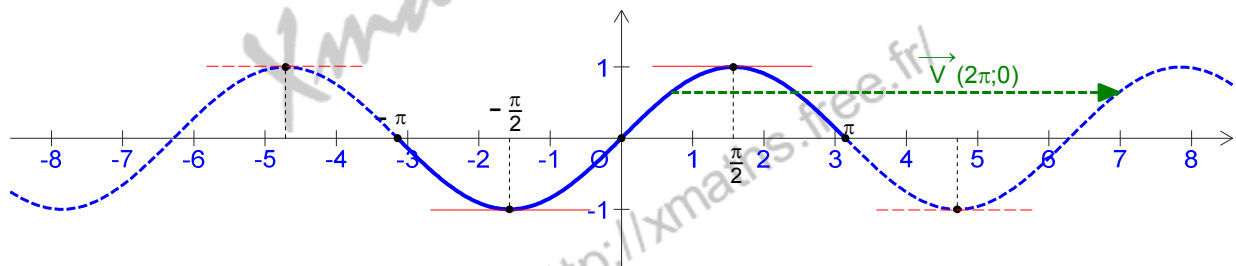
On a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ a pour coefficient directeur $-\sin \frac{\pi}{2} = -1$.

Représentation graphique de la fonction sinus

On peut tracer, sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, la courbe représentative de la fonction sinus.

La fonction sinus étant une fonction impaire, la courbe a pour centre de symétrie l'origine O .

On peut ensuite compléter la courbe sur $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que la fonction sinus est périodique de période 2π . La courbe se complète donc en faisant des translations de vecteur $\vec{V}(2\pi; 0)$ ou $-\vec{V}(-2\pi; 0)$

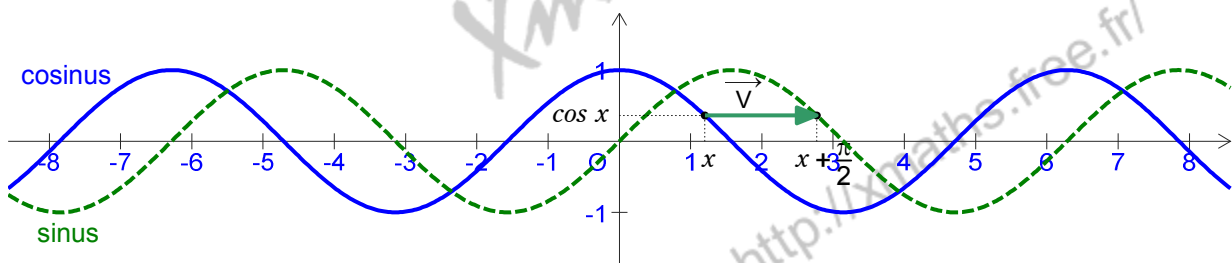


On a $\sin 0 = 0$ et la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\cos 0 = 1$.

Remarque

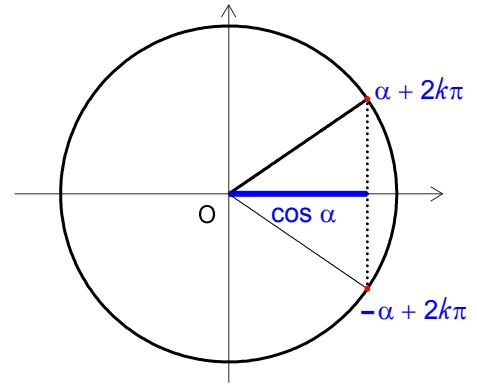
(voir [animation](#))

On sait que pour tout réel x , $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. La courbe de la fonction sinus peut donc se déduire de la courbe de la fonction cosinus en faisant une translation de vecteur $\vec{V}\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

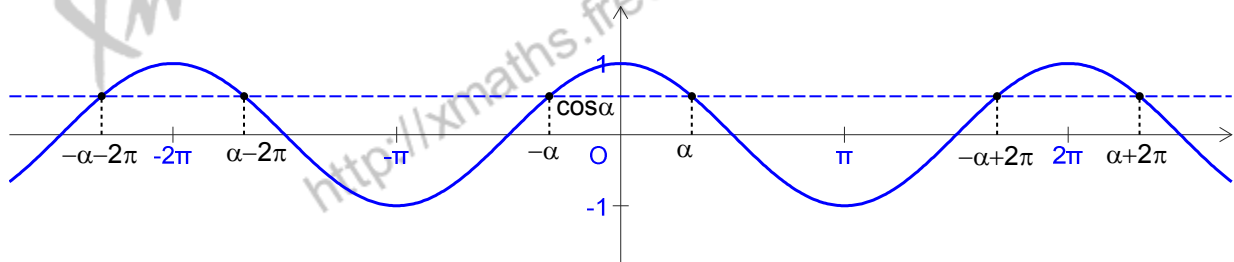


Propriété (admise)

L'équation $\cos x = \cos \alpha$ où α est un réel fixé, a pour solutions :
 $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Courbe de la fonction cosinus



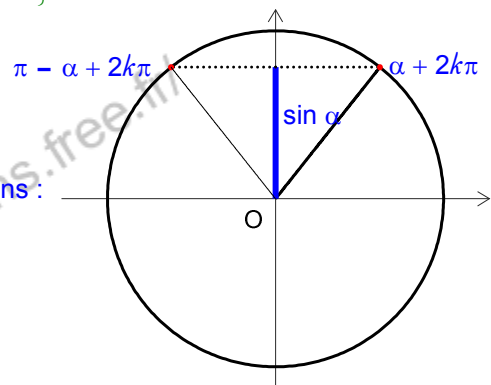
Remarque

L'équation $\cos x = 0$ a pour ensemble de solutions $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

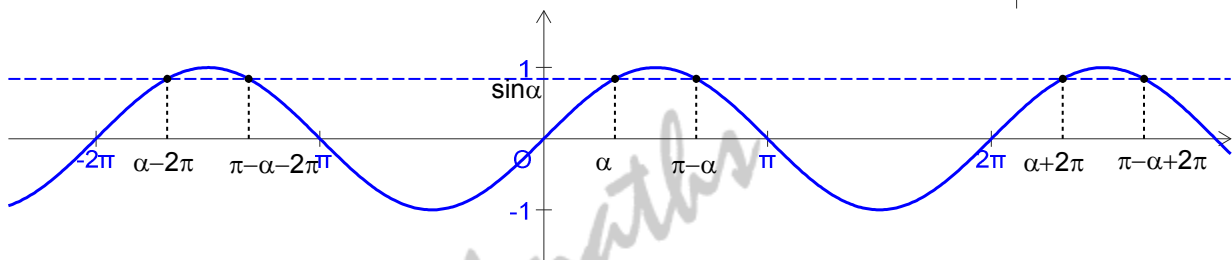
Cet ensemble peut aussi s'écrire sous la forme $\left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Propriété (admise)

L'équation $\sin x = \sin \alpha$ où α est un réel fixé, a pour solutions :
 $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Courbe de la fonction sinus



Remarque

L'équation $\sin x = 0$ a pour ensemble de solutions $\{ 0 + 2k\pi ; \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$.

Cet ensemble peut aussi s'écrire sous la forme $\{ k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$.

Exemple

Pour résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ on pourra écrire :

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ est donc $\left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 20 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \cos x = -1 \quad ; \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 21 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{7} \quad ; \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos x = -2 \quad ; \quad 2 \cos x + 1 = 0$$

Exercice 22 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant le cercle trigonométrique, donner les solutions dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ de : $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

En utilisant le cercle trigonométrique, donner les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ de : $2 \sin x - 1 \leq 0$

En utilisant le cercle trigonométrique, donner les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ de : $\cos x \geq \frac{1}{2}$

On ne demande pas de justification.

Exercice 23 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, représenter les solutions sur un cercle trigonométrique puis donner les solutions dans $[-\pi; \pi]$.

$$\sin 3x = 1 \quad ; \quad \cos x \sin x = \frac{1}{4} \quad ; \quad \cos 3x = \sin 2x$$

Exercice 24 (voir [réponses et correction](#))

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \quad ; \quad \cos 2x + \cos x = 0 \quad ; \quad 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad ; \quad 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$$

Exercice 25 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \sin x$

En utilisant la courbe de la fonction sinus, représenter graphiquement la fonction f .

Exercice 26 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x + \pi)$

1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

2°) Calculer la dérivée de f de deux façons différentes. Vérifier que les deux résultats sont identiques.

Exercice 27 (voir [réponses et correction](#))

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \sin 2x - 2 \sin x$

Calculer $f'(x)$ et donner son expression en fonction de $\cos x$.

Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Exercice 28 (voir [réponses et correction](#))

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Montrer que la fonction f est périodique de période π .

2°) Tracer la représentation graphique (Γ) de la fonction sinus sur $[-\pi; \pi]$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $x \in [-\pi; \pi]$. Montrer que : $M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow M'\left(\frac{x}{2}; y\right) \in (\mathcal{C})$

Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

3°) Calculer la dérivée de f .

4°) En utilisant un cercle trigonométrique, étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Donner le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Vérifier le graphique du 2°)

5°) Donner l'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point O.

III Repérage polaire

Définition

On appelle repère polaire du plan, tout couple $(O; \vec{i})$ où O est un point appelé origine (ou pôle) et $\vec{i}$ un vecteur de norme 1.

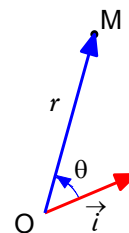
Pour tout point M du plan distinct de O , il existe un couple

$(r; \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$OM = r$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \theta [2\pi]$.

On dit que $(r; \theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M dans le repère $(O; \vec{i})$.

r est le rayon polaire de M , θ est un angle polaire de M .



Remarques

- À chaque couple $(r; \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, correspond un unique point M du plan.
- À un point M du plan distinct de O , correspond une infinité de couples $(r; \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, car θ est défini modulo 2π .
- On conviendra que le pôle O a pour coordonnées $(0; \theta)$ avec θ quelconque.

Exercice 29 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère polaire $(O; \vec{i})$.

Placer les points $M_1; M_2; M_3; M_4; M_5; M_6$ de coordonnées polaires :

$(1; \frac{\pi}{4})$; $(2; \frac{\pi}{6})$; $(\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{3})$; $(3; -\frac{\pi}{2})$; $(\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4})$; $(3; -\frac{\pi}{3})$

Exercice 30 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $M_1; M_2; M_3; M_4$ de coordonnées polaires $(2; \frac{\pi}{3})$; $(\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{6})$; $(4; -\frac{\pi}{4})$; $(3; \pi)$

dans le repère polaire $(O; \vec{i})$.

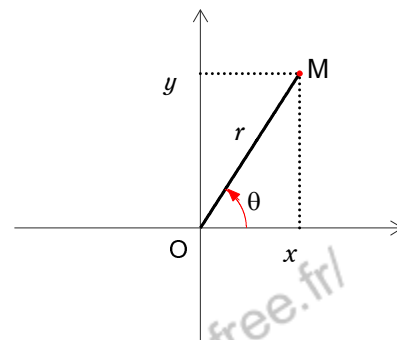
Faire un dessin et calculer les coordonnées cartésiennes de $M_1; M_2; M_3; M_4$.

Propriété (voir [démonstration 11](#))

Si un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et pour coordonnées polaires

$(r; \theta)$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$, alors on a :

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Exercice 31 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $M_1; M_2; M_3; M_4$ de coordonnées $(1; \sqrt{3})$; $(-3; -3)$; $(0; -5)$; $(-3; \sqrt{3})$

Faire un dessin et donner un couple de coordonnées polaires de $M_1; M_2; M_3; M_4$ dans le repère $(O; \vec{i})$

Exercice 32 (voir [réponses et correction](#))

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Représenter

- l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(2; \theta)$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$ avec $\theta \in [0; \pi]$
- l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(k; \frac{\pi}{4})$ dans le repère polaire $(O; \vec{i})$ avec $k \in [0; +\infty[$