

PROBABILITÉS

I Langage des événements

Exemple

Une urne contient trois boules : une bleue, une rouge, une verte.
On tire une boule de l'urne et on note sa couleur.

L'ensemble des résultats possibles (éventualités) peut être noté : $\Omega = \{B ; R ; V\}$.

« tirer une boule rouge » correspond à $\{R\}$.

« tirer une boule qui n'est pas bleue » correspond à $\{R ; V\}$.

« tirer une boule noire » correspond à $\emptyset$.

« tirer une boule qui n'est pas jaune » correspond à $\{B ; R ; V\} = \Omega$.

Définition

Soit Ω l'ensemble des éventualités (résultats possibles) d'une expérience aléatoire. (Ω est appelé univers).

- On appelle événement, toute partie de Ω .
- $\emptyset$ est une partie de Ω , c'est un événement, appelé événement impossible.
- Ω est une partie de Ω , c'est un événement, appelé événement certain.

Exemple

Une urne contient trois boules : une bleue, une rouge, une verte.
On tire une boule de l'urne et on note sa couleur.

L'ensemble des éventualités (univers) est $\Omega = \{B ; R ; V\}$.

Il y a huit événements : $\emptyset ; \{B\} ; \{R\} ; \{V\} ; \{B ; R\} ; \{B ; V\} ; \{R ; V\} ; \Omega$.

Les événements $\{B\} ; \{R\}$ et $\{V\}$ qui comportent un seul élément sont parfois appelés événements élémentaires.

Définition

- La réunion de deux événements A et B est un événement $A \cup B$, appelé aussi événement "A ou B".
- L'intersection de deux événements A et B est un événement $A \cap B$, appelé aussi événement "A et B".
- Lorsque deux événements A et B ont une intersection vide ($A \cap B = \emptyset$), on dit que ces événements sont disjoints ou incompatibles.
- On appelle événement contraire d'un événement A et on note $\bar{A}$ l'ensemble de toutes les éventualités qui ne sont pas dans A. (C'est la partie complémentaire de A dans Ω on la note aussi $C_{\Omega}A$).

Remarque

Un événement et son contraire sont incompatibles.

Exercice 01

(voir [réponses et correction](#))

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1°) Définir l'ensemble des éventualités Ω .

2°) Écrire sous forme de partie de Ω les événements :

A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »,

B : « obtenir un numéro impair »,

C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».

3°) Écrire sous forme de partie de Ω les événements :

$A \cup B ; A \cap B ; A \cup C ; A \cap C ; B \cup C ; B \cap C ; \bar{A} ; \bar{A} \cup C ; \bar{A} \cap C$.

Donner pour chacun d'eux une phrase qui les caractérise.

4°) Parmi les événements utilisés précédemment, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires l'un de l'autre.

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1°) Combien y a-t-il d'éventualités ?

2°) On considère les événements :

A : « obtenir un as »

P : « obtenir un pique »

a) Combien y a-t-il d'éventualités dans l'événement A ?

b) Combien y a-t-il d'éventualités dans l'événement P ?

c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.

d) Combien y a-t-il d'éventualités dans l'événement $A \cap P$, dans l'événement $A \cup P$?

II Loi de probabilité

Exemple

On dispose de deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'un est rouge, l'autre bleu.

On s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure lorsqu'on jette un de ces dés.

En faisant un grand nombre de tirages on a obtenu les résultats suivants :

Pour le dé rouge :

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Fréquence f_i	0,1633	0,1663	0,1668	0,1678	0,1686	0,1672

Pour le dé bleu :

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Fréquence f_i	0,0706	0,1522	0,1496	0,1685	0,1450	0,3141

La donnée de la liste des fréquences constitue ce que l'on appelle une distribution de fréquences.

Une distribution de fréquences a les propriétés suivantes (valables quelle que soit l'expérience envisagée) :

- Pour tout i on a $f_i \geq 0$
- $\sum f_i = 1$ (Il s'ensuit qu'on a aussi pour tout i $f_i \leq 1$)

Remarques

- En observant chacune des distributions des fréquences de l'exemple précédent, on peut supposer que le dé bleu pour lequel de fortes variations existent entre les différentes faces n'est pas équilibré, alors que le dé rouge pour lequel la fluctuation est faible est un dé équilibré.
- Il est bien évident que, même pour un grand nombre de tirages, la répartition des fréquences n'est pas stable (c'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage). Si l'on fait deux séries de 1000 lancers avec le même dé, on n'obtiendra pas exactement les mêmes résultats. Pour modéliser une expérience aléatoire, on n'utilisera pas une distribution de fréquence qui est expérimentale, mais une distribution théorique que l'on appellera loi de probabilité. Le choix de ce modèle théorique est évidemment très important pour la validité des résultats.

Définition

On considère $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_n\}$.

On définit une loi de probabilité p sur Ω en associant à chaque éventualité ω_i un nombre réel $p(\omega_i) = p_i$ tel que :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ $0 \leq p_i \leq 1$
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

On dit que p_i est la probabilité de l'événement ω_i .

Pour tout événement A on appelle probabilité de A la somme des probabilités des éventualités de A.

Si $A = \{a_1 ; a_2 ; \dots ; a_k\}$, on a : $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_k)$.

On pose d'autre part $p(\emptyset) = 0$.

Remarque

La probabilité de l'événement certain Ω est la somme des probabilités de toutes les éventualités, ce qui, par définition, donne $p(\Omega) = 1$.

Exemple

1°) Pour le dé rouge de l'exemple précédent, on supposera que les différentes faces ont la même probabilité d'apparition (on dit que les différentes faces sont équiprobables).

On utilisera alors la loi de probabilité définie par :

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité de l'événement A : « obtenir un numéro pair » est alors $p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0,50$

2°) Imaginons qu'après analyse de la structure et de la répartition des masses du dé bleu, on soit convaincu que les faces 2, 3, 4 et 5 ont la même probabilité d'apparaître et que cette probabilité est deux fois plus grande que celle de la face 1 et deux fois plus petite que celle de la face 6.

On peut en déduire que $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 2p_1 = \frac{p_6}{2}$

Sachant que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, on en déduit que :

$$p_1 + 2p_1 + 2p_1 + 2p_1 + 2p_1 + 4p_1 = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 13p_1 = 1 \quad \text{donc} \quad p_1 = \frac{1}{13}$$

On en déduit la loi de probabilité

Numéro x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité p_i	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$

La probabilité de l'événement A : « obtenir un numéro pair » est alors $p(A) = \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{4}{13} = \frac{8}{13} \approx 0,615$

Remarque

Un important théorème de mathématique, appelé loi des grands nombres peut s'exprimer ainsi :

Dans le monde théorique défini par une loi de probabilité P sur un ensemble fini, les fréquences des éléments de cet ensemble dans une suite de n expériences identiques et indépendantes tendent vers leur probabilité quand n augmente indéfiniment.

Par exemple :

- si on jette un très grand nombre de fois un dé parfaitement équilibré, la fréquence de chacune des faces tend vers sa probabilité c'est à dire vers $\frac{1}{6}$.
- si on jette un très grand nombre de fois une pièce parfaitement équilibré, la fréquence de chacune des faces tend vers sa probabilité c'est à dire vers $\frac{1}{2}$.

Exemple

On simule avec une calculatrice ou un ordinateur le lancer d'un dé équilibré et on s'intéresse à l'apparition de la face 5.

Avec une calculatrice TI-82, cette simulation peut être faite avec le programme ci-contre.

Chaque appui sur la touche enter commande l'exécution d'une série de 100 lancers et fait afficher le nombre total de lancers et la fréquence de l'apparition de la face 5.

Noter la suite $u_1 ; u_2 ; u_3 ; \dots$ des fréquences de la face 5 pour 100, 200, 300 ... lancers et constater que cette suite semble tendre vers $\frac{1}{6}$.

```
0↪N
0↪C
Lbl 0
For (I,1,100,1)
int(rand*6)+1↪D
If D=5
Then
C+1↪C
End
End
N+100↪N
Disp "NOMBRE DE LANCERS",N
Disp "FREQUENCE DU 5",C/N
Pause
Goto 0
```

Cas particulier

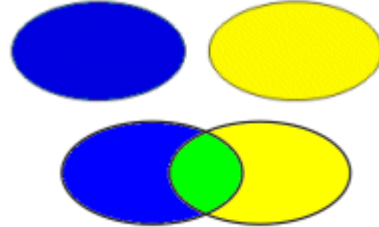
Lorsque les éventualités ont toutes la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables ou que la loi de probabilité est uniforme.

Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$, la probabilité de chaque éventualité est $p_0 = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est le nombre d'éléments de A divisé par le nombre d'éléments de Ω , c'est-à-dire $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. (On dit aussi $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$)

Remarque

- Si A et B sont deux ensembles finis disjoints ($A \cap B = \emptyset$)
 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$
- Si A et B sont deux ensembles finis quelconques
 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$



Propriétés (voir démonstration 01)

- Pour tout événement A, on a : $p(A) \in [0, 1]$.
- A étant le contraire de A, on a : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- Si A et B sont deux événements quelconques, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Si A est contenu dans B, on a : $p(A) \leq p(B)$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont des événements deux à deux disjoints, on a :
$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_k)$$

Exercice 03 (voir réponses et correction)

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1°) Définir l'ensemble Ω des éventualités (univers) et la probabilité de chacune de ces éventualités.

2°) Quelle est la probabilité des événements suivants :

- a) A : « la carte tirée est le roi de cœur », b) B : « la carte tirée est un as »,
- c) C : « la carte tirée est rouge », d) D : « la carte tirée est un as ou une carte rouge ».

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.

1°) Définir l'ensemble Ω des éventualités (univers) et la probabilité de chacune de ces éventualités.

2°) Les 20 boules sont de différentes couleurs : 8 jaunes, 6 rouges, 4 vertes et 2 bleues.

Quelle est la probabilité de chacun des événements :

- « la boule tirée est jaune »,
- « la boule tirée est rouge ou verte »,
- « la boule tirée n'est pas noire ».

Exercice 05 (voir réponses et correction)

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'un est rouge, l'autre est blanc.

Faire un tableau à double entrée pour représenter toutes les éventualités.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : « obtenir exactement un 1 » B : « obtenir au moins un 1 »
- C : « obtenir au plus un 1 » D : « le plus petit des deux numéros est 4 »
- E : « la somme des deux numéros est égale à 7 »
- F : « la somme des deux numéros est strictement supérieure à 10 ».

Exercice 06 (voir réponses et correction)

Une urne contient 49 boules indiscernables numérotées de 1 à 49. On tire une boule au hasard.

A est l'événement : « on tire une boule de numéro multiple de 2 ».

B est l'événement : « on tire une boule de numéro multiple de 5 ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$.

III Variable aléatoire

Exemple

Un jeu consiste à tirer au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. On suppose les éventualités équiprobables.

L'ensemble Ω des tirages possibles d'une carte parmi 52 a pour cardinal : $\text{card}(\Omega) = 52$.

La probabilité de chaque éventualité est alors $p_0 = \frac{1}{52}$.

Pour tout événement A on aura donc $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

À chaque tirage on associe un gain ou une perte définis de la façon suivante :

- Si on tire un as on gagne 5 euros,
- Si on tire un roi, une dame ou un valet, on gagne 1 euro,
- Dans tous les autres cas on perd 1 euro.

On note X le gain algébrique associé à chaque tirage. X peut donc prendre les valeurs -1 ; 1 et 5 .

On a donc : $X(\Omega) = \{-1 ; 1 ; 5\}$.

On notera : (X=5) l'événement : « le tirage procure un gain de 5 euros »,

(X=1) l'événement : « le tirage procure un gain de 1 euro »,

(X=-1) l'événement : « le tirage procure une perte de 1 euro ».

L'événement (X=5) est aussi l'événement « tirer un as ».

Sachant que l'on a quatre as dans le jeu de cartes, on a quatre choix possibles pour un as, donc

$\text{card}(X=5) = 4$ et par conséquent $p(X=5) = \frac{\text{card}(X=5)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

L'événement (X=1) est aussi l'événement « tirer un roi ou une dame ou un valet ».

Sachant que l'on a quatre rois, quatre dames et quatre valets dans le jeu de cartes, on a douze choix possibles, donc

$\text{card}(X=1) = 12$ et par conséquent $p(X=1) = \frac{\text{card}(X=1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

L'événement (X=-1) se produit lorsqu'on tire une carte qui n'est ni un as, ni un roi, ni une dame, ni un valet, on a donc $(52 - 16) = 36$ choix possibles, donc

$\text{card}(X=-1) = 36$ et par conséquent $p(X=-1) = \frac{\text{card}(X=-1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$.

On dit que X est une variable aléatoire et on appelle loi de probabilité de X (ou loi transportée par X), la donnée des probabilités des événements (X=-1) ; (X=1) ; (X=5) que l'on peut faire dans un tableau :

x_i	-1	1	5
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$

La somme des probabilités des trois événements (X=-1) ; (X=1) ; (X=5) est égale à 1.

L'événement (X=-1) a une probabilité de $\frac{9}{13}$ signifie que, statistiquement, la fréquence d'une perte de 1 euro est égale à $\frac{9}{13}$. Il en est de même pour (X=1) et pour (X=5).

On peut alors calculer la moyenne de gain, appelée espérance mathématique de X et notée E(X).

$$E(X) = -1 \times \frac{9}{13} + 1 \times \frac{3}{13} + 5 \times \frac{1}{13} = \frac{-9 + 3 + 5}{13} = -\frac{1}{13}.$$

Cela signifie que le jeu procure, en moyenne, une perte d'un treizième d'euro à chaque tirage.

Définition

Étant donné un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité p, on définit une variable aléatoire X sur Ω , en associant à chaque éventualité ω un nombre réel x.

On note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ l'ensemble des nombres réels ainsi obtenus. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la donnée des probabilités des événements $(X = x_i)$.

Remarques

- Lorsque l'ensemble Ω est fini, une variable aléatoire X ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.
- $(X=x_i)$ est l'ensemble des éventualités pour lesquelles la variable aléatoire X prend la valeur x_i .

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tirage le nombre :

- -10 si on tire le numéro 1 ;
- 0 si on tire les numéros 2, 3, 4 ou 5 ;
- 10 si on tire le numéro 6.

1°) Définir l'ensemble des éventualités, Ω , et donner l'ensemble $X(\Omega)$.

2°) On suppose que le dé est parfaitement équilibré.

Donner la loi de probabilité de X .

3°) On suppose que le dé est truqué et que les probabilités d'apparition des numéros 1, 2, 3, 4 et 5 sont toutes les cinq égales à 0,12.

Donner la loi de probabilité de X .

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires numérotés de 1 à 15. Ces secteurs sont de différentes couleurs.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à faire tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.

L'ensemble des éventualités est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

1°) Déterminer la probabilité des événements :

E : « le numéro est multiple de 5 » ;

F : « le numéro n'est pas multiple de 5 » ;

G : « le numéro est pair et inférieur à 11 » ;

$E \cap G$; $E \cup G$.

2°) Les secteurs 1 et 10 sont de couleur rouge.

Les secteurs 5 et 8 sont de couleur bleue.

Les secteurs 3 ; 7 ; 12 et 14 sont de couleur verte.

Les autres secteurs sont de couleur jaune.

On définit la variable aléatoire X en associant à la couleur bleue le nombre 100, à la couleur rouge le nombre 30, à la couleur verte le nombre 10 et à la couleur jaune le nombre 0.

Donner la loi de probabilité de X .

On suppose que les nombres 0 ; 10 ; 30 ; 100 correspondent à des gains en euros.

Combien un joueur gagne-t-il en moyenne par partie ? Quelle doit-être la mise pour que le jeu soit équitable ?



Définition - Propriété (voir [démonstration 02](#))

On considère un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité p et X une variable aléatoire numérique.

On note $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

On appelle espérance mathématique de X (ou moyenne) le nombre réel :

$$E(X) = x_1 \cdot p(X=x_1) + x_2 \cdot p(X=x_2) + \dots + x_n \cdot p(X=x_n) \quad \text{c'est-à-dire : } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(X=x_i) .$$

On appelle variance de X le nombre réel (positif) :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p(X=x_1) + (x_2 - E(X))^2 \cdot p(X=x_2) + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p(X=x_n)$$

$$\text{c'est-à-dire } V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot p(X=x_i) . \quad \text{On a aussi } V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \cdot p(X=x_i) - E(X)^2$$

On appelle écart-type de X le nombre réel (positif) : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

L'espérance mathématique est une mesure de tendance centrale.

L'écart-type est une mesure de dispersion.

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

On jette simultanément deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- 1°) Définir l'ensemble des éventualités Ω et la loi de probabilité sur Ω .
- 2°) Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6 ?
- 3°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux numéros dont la somme est 4 ?
- 4°) On appelle S la somme des deux numéros obtenus.
Donner la loi de probabilité de S. Calculer l'espérance mathématique de S.

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

On jette une pièce de monnaie.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre 3 au tirage de pile et 5 au tirage de face.

- 1°) On suppose la pièce parfaitement équilibrée, déterminer alors l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
- 2°) La pièce n'est peut-être pas parfaitement équilibrée, on note p la probabilité d'obtenir face.
 - a) Exprimer en fonction de p l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
 - b) Démontrer que l'on a $3 \leq E(X) \leq 5$.
 - c) Déterminer les valeurs de p pour lesquelles l'écart-type est maximum ou minimum.
A quelles situations cela correspond-t-il ?

Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie et on appelle "tirage" le résultat obtenu.

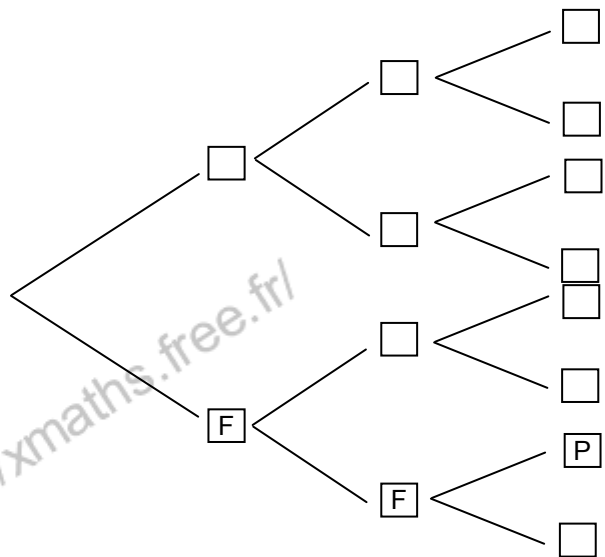
(Face ; Face ; Pile) est ainsi un tirage noté FFP

Compléter l'arbre ci-contre et donner le nombre de tirages possibles.

En supposant que ces tirages sont équiprobables, déterminer la probabilité pour que le deuxième jet de la pièce donne "Face".

A chaque tirage on associe 20 points pour "Pile" et 10 points pour "Face" et on note X la somme des points obtenus.

Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

**Exercice 12** (voir [réponses et correction](#))

On donne 4 dés cubiques bien équilibrés :

Dé n°1 : quatre faces marquées 4, deux faces marquées 0

Dé n°2 : six faces marquées 3

Dé n°3 : quatre faces marquées 2, deux faces marquées 6

Dé n°4 : trois faces marquées 5, trois faces marquées 1.

Caïn choisit un dé, puis Abel choisit un des trois dés restant.

Chacun jette son dé, celui qui obtient le nombre le plus grand est déclaré vainqueur.

- 1°) Caïn choisit le dé N° 1, Abel décide de choisir le dé N° 4.

A l'aide d'un tableau décrivant tous les tirages, montrer que la probabilité qu'Abel gagne est de $\frac{2}{3}$.

- 2°) Caïn choisit le dé N° 4, Abel décide de choisir le dé N° 3.

Montrer que la probabilité qu'Abel gagne est encore $\frac{2}{3}$.

- 3°) Caïn choisit le dé N°3, quel dé Abel doit-il choisir pour gagner avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

- 4°) Même question que 3°) lorsque Caïn choisit le dé N° 2.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

On jette cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. On appelle tirage le résultat obtenu. On considère la variable aléatoire G qui à chaque tirage associe 50 si on obtient cinq résultats identiques, 10 si on obtient 4 résultats identiques (et quatre seulement) – 15 dans les autres cas.

Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de G.