

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE LIMITES

I Limite en $+\infty$ et $-\infty$

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

Soit f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$.

2°) Démontrer que pour tout x dans $[1; +\infty[$, $f(x) < 1$.

Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f ?

3°) Déterminer un réel A tel que : si $x > A$, alors $f(x) > 0,99$.

Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathcal{C}$) ?

4°) Déterminer un réel A tel que : si $x > A$, alors $f(x) > 0,9999$.

Que peut-on penser de la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

5°) Faire le tableau de variations de f et tracer la courbe ($\mathcal{C}$).

Exemple

Compléter le tableau de valeurs suivant :

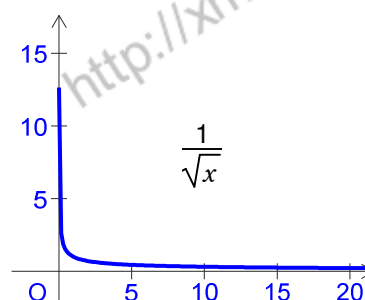
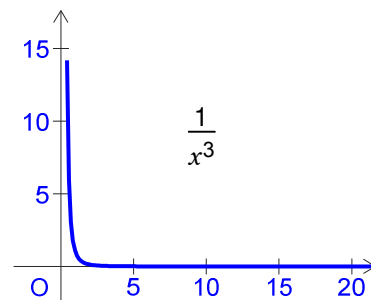
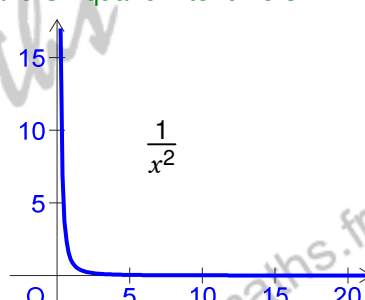
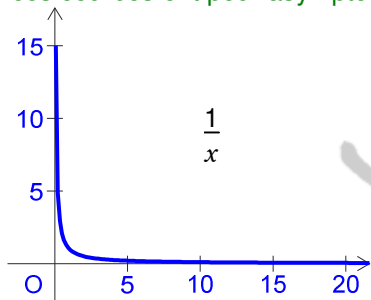
x	10	20	50	100	300	1000	5000	10000
$\frac{1}{x}$								
$\frac{1}{x^2}$								
$\frac{1}{x^3}$								
$\frac{1}{\sqrt{x}}$								

Chacune des fonctions ci-dessus prend des valeurs aussi proches de zéro que l'on veut à partir du moment où on choisit x suffisamment grand.

On dit que les fonctions qui à x associent $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Les représentations graphiques de ces fonctions obtenues avec une calculatrice ou un ordinateur montrent que chacune des courbes est très proche de l'axe Ox lorsque x est très grand positif.

On dit que ces courbes ont pour asymptote horizontale l'axe Ox quand x tend vers $+\infty$.



Remarque

Plus généralement on dit qu'une fonction f tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ si on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de 0 à partir du moment où on choisit x suffisamment grand.

On dit dans ce cas que la courbe représentative de f a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ (Axe Ox)

Propriété (admise)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant la limite de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{x}$$

Remarque

Lorsque x tend vers $-\infty$, c'est-à-dire lorsque x devient très grand (en valeur absolue) négatif, $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^3}$ prennent des valeurs aussi proches de zéro que l'on veut.

Propriété (admise)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

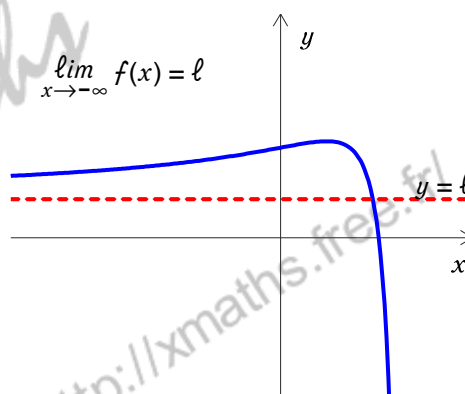
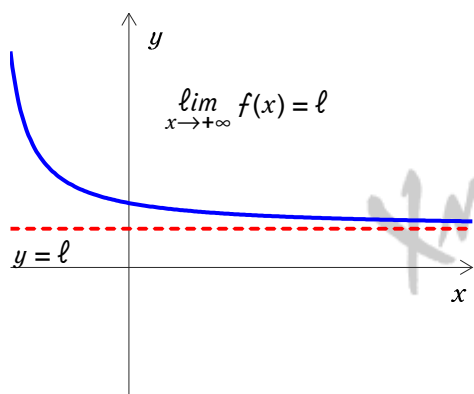
Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant des limites connues, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

Définition

Si la limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) d'une fonction f est égale à un nombre réel ℓ , alors on dit que la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$)



Remarque

Dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ revient à dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ell = 0$ ou encore que

$$f(x) = \ell + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

(On a une remarque similaire lorsque x tend vers $-\infty$)

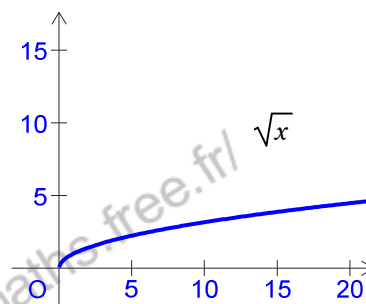
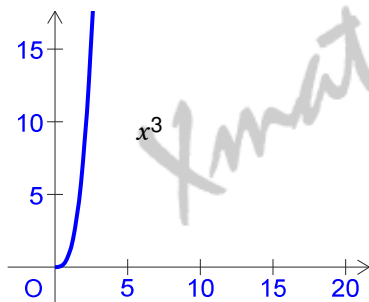
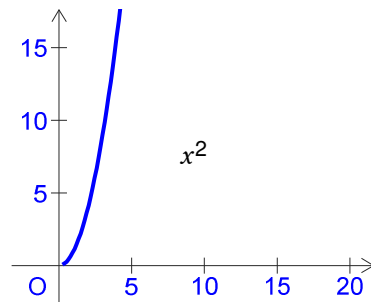
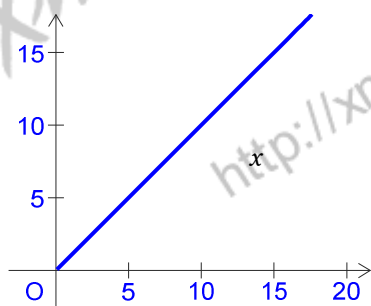
Exemple

Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10	20	50	100	300	1000	5000	10000
x^2								
x^3								
$\sqrt{x}$								

Chacune des fonctions ci-dessus prend des valeurs aussi grandes que l'on veut à partir du moment où on choisit x suffisamment grand.

On dit que les fonctions qui à x associent x ; x^2 ; x^3 ; $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.



Remarque

Plus généralement on dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à partir du moment où on choisit x suffisamment grand.

De façon similaire, on pourra dire qu'une fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, ou qu'une fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, ou qu'une fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Propriété (admise)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant des limites connues, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 5x ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 1) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + x$$

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant un tableau de valeurs, ou une représentation graphique de la fonction obtenue avec une calculatrice ou un ordinateur, conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 9x^2 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 - 5} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x^2 + 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{x^2}$$

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$

1°) Tracer avec une calculatrice ou un ordinateur, la courbe représentative de f .

Conjecturer la limite de f en $+\infty$.

2°) Montrer que pour tout $x \neq 0$ on a : $2x^3 + x^2 + 2x - 3 = x^3 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)$ et $x^2 + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$

En déduire que $f(x) = \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)}{1 + \frac{1}{x^2}}$ pour tout $x \neq 0$

Que peut-on dire de la limite de f en $+\infty$?

3°) Montrer que pour tout réel x , on a : $f(x) = 2x + 1 - \frac{4}{x^2 + 1}$

Retrouver à partir de cette expression la limite de f en $+\infty$

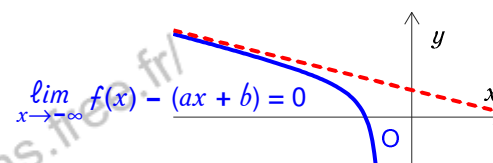
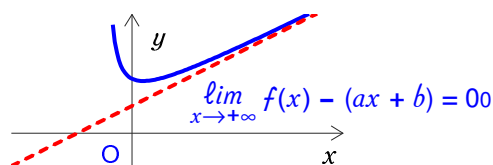
4°) Faire apparaître sur le dessin du 1°) la droite d'équation $y = 2x + 1$. Que remarque-t-on ?

Définition

Soit f une fonction, et soient a et b deux nombres réels.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors on dit que la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f a pour asymptote (oblique) la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors on dit que la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f a pour asymptote (oblique) la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $-\infty$.

**Remarque**

Dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ revient à dire que $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

(On a une remarque similaire lorsque x tend vers $-\infty$.)

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

Soit f définie par $f(x) = 3 - x - \frac{1}{x}$

Justifier que la courbe représentative de f a pour asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, une droite D dont on précisera l'équation. Vérifier en représentant la courbe avec une calculatrice ou un ordinateur.

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

Dans chacun des cas déterminer la limite demandée. Peut-on déterminer une asymptote à la courbe de f ?

1°) $f(x) = \frac{3}{2-x} + 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3°) $f(x) = \frac{3}{2x^2 - 5}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4°) $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

5°) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

6°) $f(x) = \frac{2x-1}{1-3x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

7°) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - 5x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

8°) $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x+1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

Soit f définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x + 2}$

En traçant la courbe représentative de f avec une calculatrice ou un ordinateur, conjecturer l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$. Démontrer.

II Limite en a

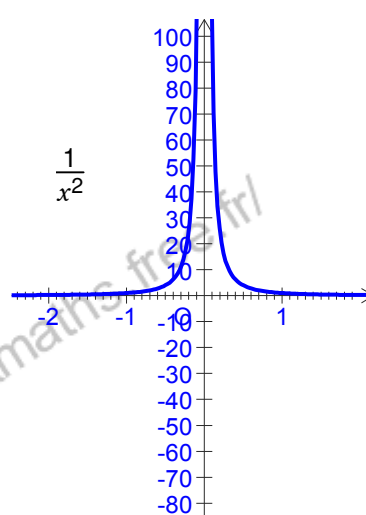
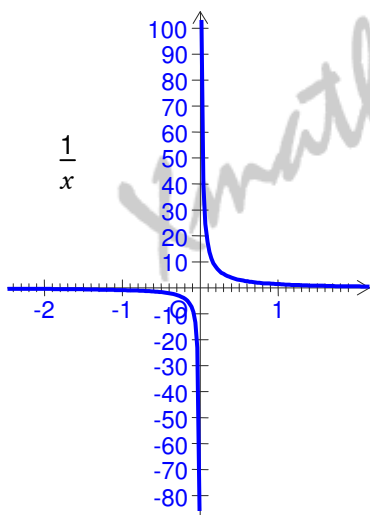
Exemple

Compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-20}
$\frac{1}{x}$							
$\frac{1}{x^2}$							

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	-10^{-2}	-10^{-5}	-10^{-20}
$\frac{1}{x}$							
$\frac{1}{x^2}$							

Chacune des fonctions ci-dessus prend des valeurs aussi grandes que l'on veut (positives ou négatives) à partir du moment où on choisit x suffisamment proche de zéro.



Propriété (admise)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Remarque

La règle des signes aura une importance capitale pour déterminer si une fonction tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{1}{x} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x^2} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{2-x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$$

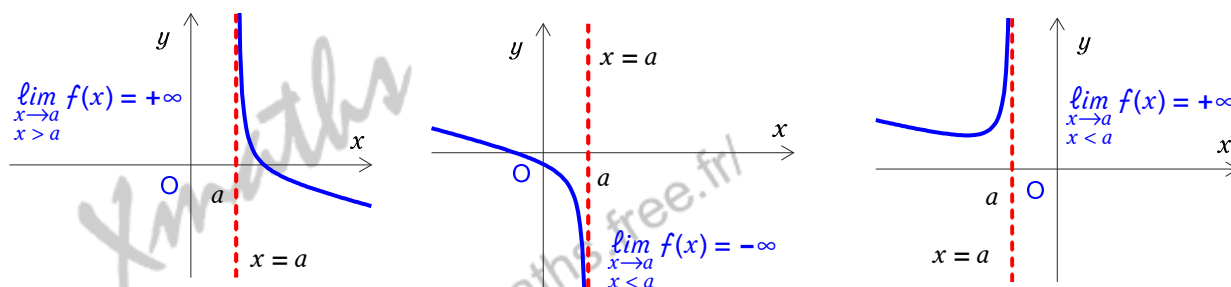
Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{3-x} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{-3}{2x-10} ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-2}{|x+3|}$$

Définition

Lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers un réel a (par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures), on dit que la courbe représentative de f a pour asymptote (verticale) la droite d'équation $x = a$.



Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{1-3x}{x-5} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x+1}{2-x} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{6-2x}{3+x} ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3+2x}{1-x^2}$$

Vérifier en traçant les courbes avec une calculatrice ou un ordinateur.

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

Donner l'ensemble de définition de f .

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

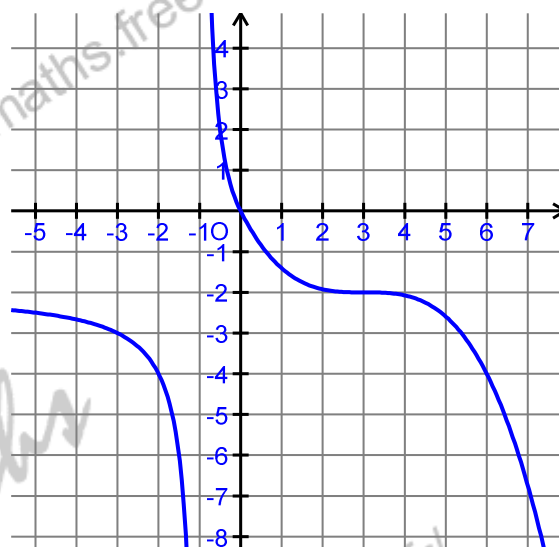
On considère la fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

Conjecturer en utilisant le graphique les valeurs de :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction f définie pour $x \neq -2$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 8}{x + 2}$

1°) Justifier que pour tout $x \neq -2$, on peut écrire $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$

a , b et c étant des réels à déterminer.

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f .

3°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

4°) Donner le tableau des variations de f .

5°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) et ses asymptotes.

6°) Justifier que la courbe ($\mathcal{C}$) a pour centre de symétrie le point $\Omega(-2; -1)$

7°) Déterminer les abscisses des points de ($\mathcal{C}$) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

Placer ces points sur le dessin et tracer les tangentes correspondantes.

8°) Résoudre l'équation $f(x) = -x^2 + 4$. Interpréter graphiquement.

III Règles de calcul

Les tableaux suivants permettent de donner, dans certains cas, la limite de la somme et du produit de deux fonctions f et g , ainsi que la limite de l'inverse d'une fonction f lorsqu'on connaît la limite des deux fonctions. Les limites peuvent être des limites en $+\infty$, en $-\infty$, en x_0 , des limites à droite ou à gauche, mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de la même nature.

(Il n'est, par exemple, pas question d'utiliser le tableau avec la limite de f en $+\infty$ et la limite de g en 0)

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Limite d'un inverse

Si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarques

- Les résultats des deux tableaux précédents permettent de trouver les résultats pour un quotient.
- Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de «forme indéterminée». Les formes indéterminées sont de 2 types exprimés sous forme abrégée par : $+\infty - \infty$ $0 \times \infty$. Ces notations, incorrectes, sont à proscrire dans un devoir rédigé.

Propriété (admise)

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

$P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 3x - 5$. On pourra écrire $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$

Le résultat se démontre facilement en factorisant le terme de plus haut degré.

$R(x) = \frac{x^2 + 1}{3x + 2}$. On pourra écrire $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$

Le résultat se démontre facilement en factorisant les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 3x^2 + 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{3x^2+5x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x^2}{1+2x^2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^5}{(x+3)^4}$

Exercice 17 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} -3x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -3x^3$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} -3x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ et $\lim_{x \rightarrow 2} -3x^3$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{2x-2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-2x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2}$

La limite d'un polynôme est-elle égale à la limite de son terme de plus haut degré ?

La limite d'une fonction rationnelle est-elle égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur ?

RemarqueLa propriété sur les limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou $-\infty$. En aucun cas elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.**Exercice 18** (voir [réponses et correction](#))Dans chacun des cas, justifier qu'il existe au moins deux fonctions f et g telles que :

- 1°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
 2°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$
 3°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
 4°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
 5°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exercice 19 (voir [réponses et correction](#))La fonction f est définie par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	+	0	-
f					2		

Déterminer les valeurs de a, b, c et d .Compléter le tableau en donnant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.Indiquer les asymptotes à la courbe représentative de f .**Exercice 20** (voir [réponses et correction](#))Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-b\}$ par : $f(x) = \frac{ax^2 - 4}{x + b}$ On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Répondre par Vrai ou par Faux aux questions suivantes (justifier) :

- 1°) Pour toutes valeurs de (a, b) la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale.
 2°) Il existe au moins une valeur de a telle que $(\mathcal{C})$ admette une asymptote horizontale.
 3°) Il existe au moins un couple (a, b) tel que $(\mathcal{C})$ ait pour asymptote la droite d'équation $y = 1$.
 4°) Pour $(a, b) = (1, 1)$, $(\mathcal{C})$ a pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = x - 1$.
 5°) Pour $(a, b) = (-1, 1)$, $(\mathcal{C})$ n'a pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.